Задачи к спецкурсу "Ренормализация и универсальность Фейгенбаума", 14 февраля 2011 г.

Пусть f — непрерывная функция на отрезке I, отображающая его в себя.
Через $D, D_1, D_2, \ldots$ будем обозначать отрезки, лежащие в I, а через $\prec$ — порядок Шарковского на $\mathbb{N}$.

Занятие посвящено доказательству следующей теоремы:

Теорема 0.1. *(i) Если f обладает точкой (наименьшего возможного) периода a и $b \prec a$, то f обладает точкой (наименьшего возможного) периода b.*
(ii) Для каждого непустого начального отрезка M порядка Шарковского существует функция f, для которой совокупность периодов всех ее периодических точек совпадает с M.

1. Пусть точка x имеет период n при действии отображения f. Каков её период при действии отображения f^k?

2. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — самый короткий из циклов нечётной длины, большей 1. Обозначим через $y_1, \ldots, y_n$ упорядоченные по возрастанию точки $x_1, \ldots, x_n$.
a) Существует такое $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, что отрезок $D = [y_i, y_{i+1}]$ накрывает себя.
b) $D \subset f(D) \subset f^2(D) \subset \cdots \subset f^k(D) \subset \ldots$.
c) $f^k(D)$ $(k \leqslant n-2)$ содержит не меньше, чем $k+2$ точки набора $y_1, \ldots, y_n$.
d) Существует j, такое что y_j и $f(y_j)$ лежат по одну сторону от середины отрезка D.
e) Найдётся отрезок $E = [y_k, y_{k+1}]$, не совпадающий с D, но накрывающий D.
f) Если $E \subset f^{n-3}(D)$, то f имеет цикл нечётной длины, большей 1 и меньшей n (что противоречит условию).
g) Отрезок $f^k(D)$ содержит (при $k \leqslant n-2$) ровно $k+2$ точки набора $y_1, \ldots, y_n$.
h) При фиксированном n функция f может переставлять точки $y_1, \ldots, y_n$ только одним из двух возможных способов.
i) Функция f имеет цикл любой чётной длины и любой нечётной длины, большей n.

3. a) Пусть точка x имеет период n при действии отображения f^k. Верно ли, что она имеет период nk при действии f?
b) Докажите, что утверждение предыдущего пункта верно при условии, что каждый простой делитель k делит число n.

4. Пусть n — натуральное число, c — нечётное, большее 1, d — чётное. Докажите, что если f имеет точку периода $2^n c$, то f имеет точку периода $2^n d$.

Множество всех периодов точек под действием f будем обозначать $\operatorname{Per} f$.

5. Пусть дана функция f с $\operatorname{Per} f = P$. Постройте функцию g, для которой $\operatorname{Per} g = 2P \cup \{1\}$.

6. Приведите пример функции:
a) имеющей точку периода 9, но не имеющей точки периода 7;
b) имеющей точки периодов 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, но не имеющей точек других периодов;
c) имеющей точку периода 6, но не имеющей точек нечётных периодов, больших единицы.

7. a) Пусть точка имеет период 27 под действием f^4. Докажите, что она имеет период 27, 54 или 108 под действием f.
b) Если f имеет точку периода 100, то она имеет точку периода 108.

8. Пусть n — натуральное число, $c > 1$ и $d > c$ — нечётные числа. Докажите если $2^n c \in \operatorname{Per} f$, то $2^n d \in \operatorname{Per} f$.

9. Пусть f имеет цикл $(x_1, \ldots, x_n)$ чётной длины, $y_1, \ldots, y_n$ — те же точки, упорядоченные по возрастанию.
a) Утверждения задач 2a)-2c) справедливы и в этом случае.
b) Если утверждение задачи 2d) не выполняется, то функция имеет цикл длины 2.
c) Если утверждение задачи 2d) выполняется, то функция имеет цикл нечётной длины, большей 1 (а значит, и цикл длины 2).

10. Докажите, что если $2^n \in \operatorname{Per} f$, где $n \geqslant 1$, то $2^{n-1} \in \operatorname{Per} f$.

11. Завершите доказательство теоремы.