Задачи к спецкурсу "Ренормализация и универсальность Фейгенбаума", 07 марта 2011 г.

1. *(к доказательству леммы 3.1)* Докажите, что если множество Жюлиа рационального отображения пусто, то существует последовательность таких отображений f^{n_k}, что они сходятся к общему (голоморфному) пределу g на всей сфере Римана.
(Указание: используйте диагональный метод.)

2. Докажите, что множество Жюлиа рационального отображения степени 1 либо пусто, либо состоит из единственной параболической или отталкивающей точки.

3. Пусть $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ — рациональное степени $d \geqslant 2$. Докажите, что:
a) f полиномиально тогда и только тогда, когда $f^{-1}(\infty) = \infty$;
b) f имеет $\{0, \infty\}$ в качестве множества точек с конечной большой орбитой тогда и только тогда, когда $f(z) = a \cdot z^{\pm d}$, $a \neq 0$;
c) f имеет точки с конечными большими орбитами тогда и только тогда, когда f сопряжено полиному или отображению $z \mapsto 1/z^d$ при помощи некоторого автоморфизма $\hat{\mathbb{C}}$.

4. Рассмотрим последовательность $f_n(z) = z + n$. Докажите, что она:
a) равномерно на компактах в $\mathbb{C}$ сходится к бесконечности;
b) поточечно сходится к бесконечности в $\hat{\mathbb{C}}$, но не сходится к постоянному отображению $f(z) = \infty$ в C^0-топологии $\hat{\mathbb{C}}$.

5. *(пример Фату)*
a)* Докажите, что для $f(z) = z^2 + c$, где $c > 1/4$ — вещественная постоянная, множество Жюлиа — канторово множество, не пересекающее вещественную ось. А именно, каждая орбита $z_0 \mapsto z_1 \mapsto \ldots$, лежащая в множестве J, однозначно определяется последовательностью знаков $\varepsilon_n = sgn(Im(z_n))$ следующим образом:

$$z_0 = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_0 g(\varepsilon_1 g(\ldots \varepsilon_{n-1} g(\varepsilon_n \tilde{z}) \ldots)),$$

где $g(z) = \sqrt{z-c}$ — ветвь f^{-1}, отображающая плоскость с разрезом $U = \mathbb{C}\backslash[c, +\infty)$ в верхнюю полуплоскость, а $\tilde{z}$ — некоторая выделенная точка множества J в верхней полуплоскости.
(Указание: используйте тот факт, что g, ограниченная на компактное подмножество $J \subset U$, — строго сжимающее в метрике Пуанкаре ρ_U.)
b) Докажите, что каждая орбита вне J стремится к бесконечности.
c) Докажите те же утверждения для примера Фату $w \mapsto \frac{w^2}{c+w^2}$.
(Указание: используйте замену $w = c/z$.)