ЛЕКЦИЯ 11

Краткое содержание. Изоморфизм Тома и класс Эйлера.

Лемма 1. *Пусть $\mathbb{R}^n_0 \stackrel{def}{=} \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда $H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_0, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ при $k = n$ и равно нулю при прочих k. Выбор явного изоморфизма $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_0, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ равносилен выбору ориентации в пространстве $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пара $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_0)$ гомотопически эквивалентна паре $(\overline{D}_n, S^{n-1})$, где $\overline{D}_n$ — замкнутый n-мерный шар, а S^{n-1} — его граница. Эта пара клеточная, так что по теореме Борсука $H^k(\overline{D}_n, S^{n-1}) = \overline{H}^k(S^n)$, откуда вытекают утверждения леммы. □

Лемма 2. *Для произвольного топологического пространства B и всех k имеет место изоморфизм $H^k(B) = H^{k+n}(B \times \mathbb{R}^n, B \times \mathbb{R}^n_0)$, задаваемый формулой $x \mapsto x \times e^{(n)}$, где $e^{(n)}$ — образующая группы $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_0, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$*

Доказательство. Пусть вначале $n = 1$. Пространство $B \times \mathbb{R}_-$, где $\mathbb{R}_-$ — множество отрицательных чисел, является деформационным ретрактом $B \times \mathbb{R}$, откуда $H^k(B \times \mathbb{R}, B \times \mathbb{R}_-) = 0$ для всех k. Из точной когомологической последовательности тройки $(B \times \mathbb{R}, B \times \mathbb{R}_0, B \times \mathbb{R}_-)$ вытекает, что группы $H^k(B \times \mathbb{R}_0, B \times \mathbb{R}_-)$ и $H^{k+1}(B \times \mathbb{R}, B \times \mathbb{R}_0)$ изоморфны. Пара $(B \times \mathbb{R}_0, B \times \mathbb{R}_-)$ гомотопически эквивалентна $(B, \varnothing)$, откуда $H^k(B) = H^k(B \times \mathbb{R}_0, B \times \mathbb{R}_-) = H^{k+1}(B \times \mathbb{R}, B \times \mathbb{R}_0)$. Из определения точной последовательности тройки следует, что изоморфизм задается формулой $x \mapsto x \times e^{(1)}$, где $e^{(1)}$ — образующая группы $H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0)$.

Пусть теперь $C \subset B$ — открытое множество. Тогда операция $x \mapsto x \times e^{(1)}$ определяет отображение $H^k(B, C) \to H^{k+1}(B \times \mathbb{R}, C \times \mathbb{R} \cup B \times \mathbb{R}_0)$. Это отображение коммутирует с гомоморфизмами в точных последовательностях пар (B, C) и $(B \times \mathbb{R}, C \times \mathbb{R} \cup B \times \mathbb{R}_0)$. Из 5-леммы (лекция 9–10) вытекает теперь, что отображение $x \mapsto x \times e^{(1)}$ — изоморфизм.

Применим теперь индукцию по n: предположим доказанным, что $H^k(B)$ изоморфно $H^{k+n}(B \times \mathbb{R}^n, B \times \mathbb{R}^n_0)$. Тогда в силу предыдущего рассуждения (где $B \mapsto B \times \mathbb{R}^n$, $C \mapsto B \times \mathbb{R}^n_0$) получаем, что $H^{k+n}(B \times \mathbb{R}^n, B \times \mathbb{R}^n_0)$ изоморфно $H^{k+n+1}(B \times \mathbb{R}^{n+1}, B \times \mathbb{R}^n_0 \times \mathbb{R} \cup B \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0) = H^{k+n+1}(B \times \mathbb{R}^{n+1}, B \times \mathbb{R}^{n+1}_0)$. □

Теорема 1. *Пусть $p : E \to B$ — ориентированное векторное расслоение ранга n с компактной базой, и пусть $E_0 \subset E$ — дополнение к нулевому сечению. Тогда существует и единствен класс $u \in H^n(E, E_0, \mathbb{Z})$, ограничение которого на произвольный слой F есть образующая группы $H^n(F, F_0, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$; здесь $F_0 \stackrel{def}{=} F \cap E_0$ — множество ненулевых векторов слоя. Отображение $x \mapsto x \cup u$ задает при всех k изоморфизм групп $H^k(E, \mathbb{Z}) = H^k(B, \mathbb{Z})$ и $H^{k+n}(E, E_0, \mathbb{Z})$.*

Доказательство. Пусть вначале расслоение p тривиально: $E = B \times \mathbb{R}^n$. Согласно лемме 2, $H^n(E, E_0)$ изоморфно $H^0(B)$; тогда u — образ класса $1 \in H^0(B)$ при этом изоморфизме.

Пусть теперь $B = B_1 \cup B_2$, где B_1, B_2 — открытые множества, над которыми расслоение тривиально. Пусть $E_1 = p^{-1}(B_1)$, $E_2 = p^{-1}(B_2)$; соответствующие классы обозначим $u_1 \in H^n(B_1)$ и $u_2 \in H^n(B_2)$. Поскольку расслоение $E_1 \cap E_2 \to B_1 \cap B_2$ также тривиально, для него соответствующий класс u_{12} существует и единствен. В силу единственности должно быть $\iota_1^* u_1 = u_{12} = \iota_2^* u_2$, где $\iota_k : E_1 \cap E_2 \to E_k$ $(k = 1, 2)$ — вложения. Тем самым последняя стрелка в относительной последовательности Майера–Виеториса для разбиения $E = E_1 \cup E_2$ по модулю $E_0 = (E_1)_0 \cup (E_2)_0$

(1)

$$\dots \to H^{n-1}(E_1 \cap E_2, (E_1 \cap E_2)_0) \to H^n(E, E_0) \to H^n(E_1, (E_1)_0) \oplus H^n(E_2, (E_2)_0) \xrightarrow{\iota_1^* - \iota_2^*} H^n(E_1 \cap E_2, (E_1 \cap E_2)_0) \to \dots$$

переводит класс (u_1, u_2) в нуль. В силу точности существует класс $u \in H^n(E, E_0)$, переходящий в (u_1, u_2). Из леммы 2 вытекает, что $H^{n-1}(E_1 \cap E_2, (E_1 \cap E_2)_0) = 0$, так что класс u единствен. Отображение $x \mapsto x \cup u$ — морфизм точной последовательности (1) (с индексом k вместо n) в абсолютную последовательность Майера–Виеториса для того же разбиения:

$$\dots \to H^{k+n-1}(E_1 \cap E_2) \to H^{k+n}(E) \to H^{k+n}(E_1) \oplus H^{k+n}(E_2) \to H^{k+n}(E_1 \cap E_2) \to \dots$$

По предыдущему рассуждению, этот морфизм является изоморфизмом в членах $E_1 \cap E_2$ и $E_1 \oplus E_2$; в силу 5-леммы он также является изоморфизмом в членах с E, что доказывает теорему в этом случае.

Поскольку база B компактна, она является объединением конечного числа N множеств, над каждым из которых расслоение тривиально. Теорема теперь выводится из предыдущего случая индукцией по N. □

Замечание. Требование компактности базы в теореме можно опустить, но мы не будем этого доказывать. Класс $u = u(p)$ называется классом Тома, а изоморфизм из теоремы — изоморфизмом Тома. В частности, из теоремы вытекает, что $H^k(E, E_0) = 0$ при $k < n$.

Вложение $\psi : (E, \varnothing) \to (E, E_0)$ порождает гомоморфизм $\psi^* : H^n(E, E_0) \to H^n(E) = H^n(B)$. Образ $e(p) \in H^n(B)$ класса $u(p)$ при этом гомоморфизме называется классом Эйлера расслоения $p : E \to B$.

Следствие 1. *Пусть η — гладкое ориентированное векторное расслоение с компактной базой B, и $f : B' \to B$ — непрерывное отображение, где B' компактно. Тогда $u(f^*\eta) = f^*u(\eta)$ и $e(f^*\eta) = f^*e(\eta)$.*

Доказательство вытекает непосредственно из определения и теоремы 1: как легко проверить, ограничение $f^*u(\eta)$ на произвольный слой F расслоения $f^*\eta$ задает образуюую в $H^n(F, F_0)$. Второе равенство вытекает из первого.

Лемма 3. *На тотальном пространстве E векторного расслоения $p : E \to B$ с клеточной базой B существует непрерывная функция $\xi : E \to \mathbb{R}$ такая, что ее ограничение на произвольный слой — положительно определенная квадратичная форма.*

Доказательство. Множество положительно определенных квадратичных форм на $\mathbb{R}^n$ — выпуклое подмножество линейного пространства $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. Предположим, что функция ξ построена на $p^{-1}(\mathrm{sk}_k(B))$; продолжим ее на $p^{-1}(e)$, где e — $k+1$-мерная клетка с характеристическим отображением $\chi_e : \overline{D}_{k+1} \to \overline{e}$. Для произвольной точки $a \in e$ пусть $\chi_e^{-1}(a) = tb$, где $b \in \partial\overline{D}_{k+1}$ и $0 \le t \le 1$. Зафискируем произвольную положительно определенную форму Q_e и положим по определению $\xi(a) = (1-t)Q_e + t\xi(\chi_e(b))$ (таким образом $\xi(\chi_e(0)) = Q_e$). □

Пусть теперь B и E — многообразия и одновременно клеточные пространства (последнее условие на самом деле выполнено всегда, но мы этого не доказывали), а отображение p — гладкое; это называется гладким векторным расслоением. Тогда функция ξ также, очевидно, может быть выбрана гладкой. Пара (E, E_0) в этом случае гомотопически эквивалентна паре (D, S), где $D = \{v \in E \mid \xi(v) \le 1\}$, $S = \{v \in E \mid \xi(v) = 1\}$. Пространство D — многообразие с краем, а S — его край.

Следствие 2 (теоремы 1)**.** *Пусть $p : E \to B$ — гладкое ориентированное векторное расслоение ранга n, база которой — ориентированное компактное многообразие B. Тогда класс $e(p) = \mathcal{D}Z \in H^n(E, \mathbb{Z}) = H^n(D, \mathbb{Z})$, где $Z \subset E$ — график нулевого сечения.*

Доказательство. Пересчение Z с любым слоем состоит из единственной точки. Поэтому класс $\mathcal{D}Z$ в ограничении на любой слой F равен образующей группы $H^n(D \cap F, S \cap F) = \mathbb{Z}$. В силу единственности $\mathcal{D}Z$ — класс Эйлера. □

Пусть теперь $s : B \to E$ — гладкое сечение расслоения p, трансверсальное к графику нулевого сечения; последнее условие означает, очевидно, что если $s(b) = 0$, то образ отображения $s'(b) : T_bB \to T_{(b,0)}E$ содержит подпространство $T_{(b,0)}F \subset T_{(b,0)}E$ ($F \stackrel{\mathrm{def}}{=} p^{-1}(b) \subset E$ — слой над точкой b).

Следствие 3 (следствия 2)**.** *Класс, двойственный по Пуанкаре (в многообразии Z, гомеоморфном базе B) к пересечению графика сечения s с многообразием Z, равен классу Эйлера в базе B.*

Доказательство. Поскольку все сечения векторного расслоения гомотопны друг к другу, класс, двойственный по Пуанкаре к графику s, также равен классу Эйлера в E. Непосредственно из определения двойственности Пуанкаре вытекает, что если подмногообразия N_1 и N_2 многообразия M пересекаются трансверсально, то ограничение класса $\mathcal{D}_M N_1$ на N_2 есть класс $\mathcal{D}_{N_2}(N_1 \cap N_2)$. □

Следствие 4 (следствия 3)**.** *Если гладкое ориентированное векторное расслоение с базой — компактным ориентируемым многообразием обладает сечением, нигде не обращающимся в нуль, то его класс Эйлера равен нулю.*

Следствие 5. *Пусть η_1, η_2 — гладкие ориентируемые векторные расслоения, базы которых M_1, M_2 — компактные ориентируемые многообразия. Тогда $e(\eta_1 \times \eta_2) = e(\eta_1) \times e(\eta_2)$.*

Доказательство. Пусть $s_1 : M_1 \to E_1$ и $s_2 : M_2 \to E_2$ — сечения расслоений η_1 и η_2. Тогда $(a, b) \mapsto (s_1(a), s_2(b)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (s_1 \times s_2)(a, b)$ — сечение $\eta_1 \times \eta_2$. Множество нулей сечения $s_1 \times s_2$ — декартово произведение множеств нулей сечений s_1 и s_2. □

Следствие 6 (следствия 5 и следствия 1)**.** *Пусть η_1, η_2 — гладкие орименируемые векторные расслоения с базой M — компактным ориентируемым многообразием. Тогда $e(\eta_1 \oplus \eta_2) = e(\eta_1) \cup e(\eta_2)$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Diag} : M \to M \times M$ — диагональное вложение. Тогда $\eta_1 \oplus \eta_2 = \mathrm{Diag}^*(\eta_1 \times \eta_2)$, откуда $e(\eta_1 \oplus \eta_2) = \mathrm{Diag}^*(e(\eta_1) \times e(\eta_2)) = e(\eta_1) \cup e(\eta_2)$. □

На самом деле требование гладкости и компактности базы в следствиях 4–6 излишне, но мы не будем этого доказывать.

Теорема 2. *Пусть M — гладкое компактное ориентированное многообразие размерности n, $p : TM \to M$ — его касательное расслоение. Тогда значение класса Эйлера $e(TM) \in H^n(M)$ на фундаментальном классе многообразия M равно эйлеровой характеристике M.*

Доказательство. Пусть s — произвольное сечение расслоения, трансверсальное нулевому. Тогда $\{b \in M \mid s(b) = 0\}$ состоит из изолированных точек, и значение $\langle e, [M]\rangle$ равно сумме знаков этих точек; знак точки это знак пересечения графика s с Z в этой точке. Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ — функция Морса. Согласно лемме 3 на TM существет послойная положительно определенная квадратичная форма ξ; ее можно понимать как семейство линейных изоморфизмов $\xi(b) : T_b^*M \to T_bM$. Векторное поле $\nabla f(b) \stackrel{\text{def}}{=} \xi(b)df(b)$ обращается в нуль только в критических точках функции f. Поскольку в некоторой окрестности криической точки x функция f — квадратичная форма индекса $\lambda(x)$, знак критической точки x равен $(-1)^{\lambda(x)}$. Тем самым $\langle e, [M]\rangle = \sum_x (-1)^{\lambda(x)}$. С другой стороны, M гомотопически эквивалентно клеточному комплексу с клетками размерностей $\lambda(x)$; тем самым величина в правой части последнего равенства — эйлерова характеристика M. □

Замечание. Заметим, что вся изложенная теория имеет очевидный аналог в когомологиях с коэффициентами $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; при этом не нужна ориентируемость (ни расслоения, ни его базы).