ЛЕКЦИЯ 12

Краткое содержание. Реализация многообразия в качестве края.

Далее все гомологии и когомологии вычисляются с коэффициентами в $\mathbb{Q}$, если не указано иное. Двойственность Пуанкаре для компактного ориентированного n-мерного многообразия M с краем ∂M — это изоморфизмы $\mathcal{D} : H_k(M) \to H^{n-k}(M, \partial M)$ и $\mathcal{D} : H_k(M, \partial M) \to H^{n-k}(M)$ для всех k.

Лемма 1. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots \to & H_k(\partial M) & \to & H_k(M) & \to & H_k(M, \partial M) & \to & H_{k-1}(\partial M) & \to \dots \\ & \downarrow \mathcal{D} & & \downarrow \mathcal{D} & & \downarrow \mathcal{D} & & \downarrow \mathcal{D} & \\ \dots \to & H^{n-1-k}(\partial M) & \to & H^{n-k}(M, \partial M) & \to & H^{n-k}(M) & \to & H^{n-k}(\partial M) & \to \dots \end{array},$$

где верхняя строка — точная гомологическая последовательность пары $(M, \partial M)$, а нижняя — когомологическая, коммутативна.

Доказательство — упражнение.

Пусть теперь $n = 2k+1$; рассмотрим фрагменты $H_{k+1}(M, \delta M) \xrightarrow{\delta} H_k(\partial M) \xrightarrow{\iota_*} H_k(M)$ точной гомологической последовательности. Оператор $\delta^* : H^k(\partial M) \to H^{k+1}(M, \partial M)$ сопряжен δ, откуда $(H_k(\partial M)/\operatorname{Im}\delta)^* = \operatorname{Ker}\delta^*$. Двойственность Пуанкаре переводит $H_k(\partial M) \mapsto H^k(\partial M)$ и $\operatorname{Ker}\iota_* \mapsto \operatorname{Ker}\delta^*$. Отсюда $\dim \operatorname{Ker}\iota_* = \dim H_k(\partial M)/\operatorname{Im}\delta = \dim H_k(\partial M)/\operatorname{Ker}\iota_*$, то есть $\dim H_k(\partial M) = 2\dim\operatorname{Ker}\iota_*$. Тем самым если N имеет четную размерность $2k$, ориентируемо и является краем ориентируемого компактного многообразия M, то $\dim H_k(N)$ четна. То же самое верно для гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ без предположения ориентируемости. Отсюда, в частности, вытекает, что не существует компактного многообразия, край которого гомеоморфен $\mathbb{R}P^{2n}$ (здесь $H_n(\mathbb{R}P^{2n}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) или $\mathbb{C}P^{2n}$ (здесь $H_{2n}(\mathbb{C}P^{2n}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$). Отсюда также вытекает, что если N — компактный край компактного многообразия M, то $\chi(N)$ четна (если N нечетномерно, то $\chi(N) = 0$ в силу двойственности Пуанкаре, а если четномерно, то $\chi(N) = \dim H_k(N) + 2\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \dim H_i(N)$) в силу той же двойственности Пуанкаре.

Пусть теперь $\alpha \in H_{k+1}(M, \partial M)$, $\beta \in H_k(\partial M)$ и k четно (следовательно, $\dim \partial M$ делится на 4). Из определения индекса пересечения вытекает, что $\infty(\delta\alpha, \beta) = \infty(\alpha, \iota_*\beta)$. Отсюда $\infty(\delta u, \delta v) = \infty(u, \iota_*\delta v) = 0$. Следовательно, билинейная симметрическая (поскольку k четно) форма ∞ (*форма пересечений*) на пространстве $H_k(\partial M)$ равна нулю на подпространстве $\operatorname{Im}\delta$ половинной размерности. Отсюда вытекает, что индекс этой формы равен нулю.

Пример 1. Пусть M_1, M_2 — ориентированные многообразия одинаковой размерности n. Удалим из каждого из них малую окрестность точки; получим многообразия M_1' и M_2' с краем S^{n-1}. Приклеим к ним цилиндр $S^{n-1} \times [0,1]$, отождествляя основания с краем M_1' и M_2' согласно ориентации; полученное многообразие обозначается $M_1 \# M_2$ и называется связной суммой M_1 и M_2.

Пусть $M = \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$. Последовательность Майера–Виеториса для разбиения $M = (\mathbb{C}P^{2\prime} \sqcup \mathbb{C}P^{2\prime}) \cup S^3 \times [0,1]$ имеет фрагмент $0 = H_2(S^3 \sqcup S^3) \to H_2(\mathbb{C}P^{2\prime} \sqcup \mathbb{C}P^{2\prime}) \oplus H_2(S^3 \times [0,1]) \to H_2(M) \to H_1(S^3 \sqcup S^3) = 0$, откуда $H_2(M) = (H_2(\mathbb{C}P^{2\prime}))^2$. Последовательность Майера–Виеториса для разбиения $\mathbb{C}P^2 = \mathbb{C}P^{2\prime} \cup D^4$ имеет фрагмент $0 = H_2(S^3) \to H_2(\mathbb{C}P^{2\prime}) \oplus H_2(D^4) \to H_2(\mathbb{C}P^2) \to H_1(S^3) = 0$, откуда $H_2(\mathbb{C}P^{2\prime}) = H_2(\mathbb{C}P^2) = \mathbb{Q}$, и $H_2(M) = \mathbb{Q}^2$, и образующие x_1, x_2 можно выбрать с носителями в первой и второй копии $\mathbb{C}P^2$ соответственно. Следовательно, форма пересечений на $H_2(M)$ имеет вид $\infty(x_1, x_1) = \infty(x_2, x_2) = 1$ (так в $\mathbb{C}P^2$) и $\infty(x_1, x_2) = 0$ (поскольку носители не пересекаются). Таким образом индекс формы равен 2, и M не может быть краем компактного многообразия.

А теперь все гомологии и когомологии вычисляются с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Пространство $\mathbb{R}P^\infty$ состоит из всех финитных наборов $a = [a_0 : \dots : a_m : \dots]$ действительных чисел, не равных тождественно нулю и заданных с точностью до умножения на произвольный ненулевой действительный множитель. Топология в $\mathbb{R}P^\infty$ определяется клеточным разбиением, при котором $\operatorname{sk}_k \mathbb{R}P^\infty$ — множество точек a, для которых $a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = 0$. Из клеточного комплекса (в котором все дифференциалы равны нулю) получаем, что $H^*(\mathbb{R}P^\infty) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x]$, где класс x — образующая группы $H^1(\mathbb{R}P^\infty) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Расслоение Хопфа ξ с базой $\mathbb{R}P^\infty$ это линейное расслоение, слой которого над точкой a — множество финитных последовательностей $x_0, x_1, \dots$ таких, что $x_k = \lambda a_k$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ и всех k.

Пусть M — компактное гладкое многообразие (не обязательно ориентируемое), η — гладкое векторное расслоение ранга n с базой M. Примем без доказательства (или потребуем, чтобы это было так), что M —

клеточное пространство. Обозначим $p_1 : M\times\mathbb{R}P^\infty \to M$ и $p_2 : M\times\mathbb{R}P^\infty \to \mathbb{R}P^\infty$ проекции прямого произведения на сомножители и рассмотрим расслоение $\mu = p_1^*\eta\otimes p_2^*\xi$ с базой $M\times\mathbb{R}P^\infty$. Пусть $e_2(\mu)\in H^n(M\times\mathbb{R}P^\infty)$ — его класс Эйлера, приведенный по модулю 2 (такой класс существует, даже если расслоение неориентируемо). Поскольку M и $\mathbb{R}P^\infty$ — клеточные пространства, а коэффициенты когомологий лежат в поле $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, имеем $H^*(M\times\mathbb{R}P^\infty) = H^*(M)\otimes H^*(\mathbb{R}P^\infty) = H^*(M)[x]$. Таким образом, $e_2(\mu) = \sum_{i=0}^n w_i(\eta)x^{n-i}$, где $w_i(\eta)\in H^i(M)$ называется i-м классом Штифеля–Уитни расслоения η. Как нетрудно проверить (проделайте!), $w_0(\eta) = 1$ для любого расслоения. Сумма $w(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n w_i(\eta)\in H^*(M)$ (неоднородный элемент кольца когомологий) называется полным классом Штифеля–Уитни.

Пример 2. Пусть ξ_m — тавтологическое расслоение на $\mathbb{R}P^m$. Тогда $w_1(\xi_m)\neq 0$ — образующая $x_m\in H^1(\mathbb{R}P^m) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Действительно, пусть s_m — сечение ξ_m, заданное формулой $s_m([a_0 : \dots : a_m]) = \frac{1}{a_0^2+\dots+a_n^2}(a_0^2, a_0a_1, \dots, a_0a_m)$. Множество его нулей — гиперплоскость $a_0 = 0$, таким образом $e_2(\xi_m)$ — класс, двойственный к гиперплоскости, который и есть $x_m\in H^1(\mathbb{R}P^m)$.

Пусть теперь N произвольно. Сечение расслоения $p_1^*\xi_m\otimes p_2^*\xi_N$ на $\mathbb{R}P^m\times\mathbb{R}P^N$, равное $s_m\circ p_1\otimes s_N\circ p_2$, трансверсально нулевому сечению (проверьте!). Множество его нулей — объединение множеств нулей $s_m\circ p_1$ и $s_N\circ p_2$. Отсюда $e_2(p_1^*\xi_m\otimes p_2^*\xi_N) = x_m + x_N$ по лемме. Вложение $\mathbb{R}P^N\subset\mathbb{R}P^\infty$ порождает изоморфизм в когомологиях до N-ых включительно; таким образом, $e_2(p_1^*\xi_m\otimes p_2^*\xi) = x_m + x$, то есть $w_0(\xi_m) = 1$, $w_1(\xi_m) = x_m$ и $w(\xi_m) = 1 + x_m$.

Теорема 1. *1) $w_k(f^*\eta) = f^*w_k(\eta)$ для всех k.*
2) $w(\eta_1\oplus\eta_2) = w(\eta_1)w(\eta_2)$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из следствия 1 лекции 12.

Второе: $\sum_{i=0}^{n_1+n_2} w_i(\eta_1\oplus\eta_2)x^{n_1+n_2-i} = e_2((\eta_1\oplus\eta_2)\otimes\xi) = e_2((\eta_1\otimes\xi)\oplus(\eta_2\otimes\xi)) = e_2(\eta_1\otimes\xi)\cup e_2(\eta_2\otimes\xi)$ (следствие 6 лекции 12) $= \sum_{i=0}^{n_1} w_i(\eta_1)x^{n_1-i}\sum_{i=0}^{n_1} w_i(\eta_2)x^{n_2-i}$. Теперь формально подставим $x = 1$. □

Лемма 2. *Касательное расслоение к $\mathbb{R}P^n$ изоморфно расслоению $\mathrm{Hom}(\xi_n, \xi_n^\perp)$, где $\xi_n^\perp$ — расслоение, слоем которого над точкой $[a_0 : \dots : a_n]$ является гиперплоскость, перпендикулярная прямой, натянутой на вектор $(a_0, \dots, a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$.*

Доказательство. Пусть $\ell = [a_0 : \dots : a_n]\in\mathbb{R}P^n$; выберем точку $a = (a_0, \dots, a_n)\in\ell\subset\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $x(t) = [x_0(t) : \dots : x_n(t)]$ — кривая в $\mathbb{R}P^n$ с начальной точкой $x(0) = a$; выберем кривую $\tilde{x}(t) = (x_0(t), \dots, x_n(t))\in x(t)\subset\mathbb{R}^{n+1}$ такую, что $\tilde{x}(0) = a$. Кривая $\tilde{x}$ задана с точностью до умножения на функцию $\lambda(t)$, где $\lambda(0) = 1$. Тогда скорость этой кривой при $t = 0$ задана с точностью до замены $x'(0)\mapsto\lambda'(0)x(0) + x'(0)$; тем самым однозначно определен вектор $x'(0)\in\mathbb{R}^{n+1}/\ell$. Можно считать этот вектор образом вектора $(a_0, \dots, a_n)$ при линейном отображении $\ell\to\mathbb{R}^{n+1}/\ell$. Поскольку слой касательного расслоения в точке ℓ — множество проходящих через ℓ кривых с точностью до совпадения скоростей в этой точке, этим лемма доказана. □

Теорема 2. *Расслоение $T\mathbb{R}P^n\oplus\mathbf{1}$ изоморфно прямой сумме $(n+1)$ копий тавтологического расслоения ξ_n (символом $\mathbf{1}$ обозначено тривиальное одномерное расслоение).*

Доказательство. Расслоение $\mathrm{Hom}(\xi_n, \xi_n)$ одномерно и имеет сечение (единичный гомоморфизм во всех слоях), поэтому оно тривиально: $\mathrm{Hom}(\xi_n, \xi_n) = \mathbf{1}$. Следовательно, $T\mathbb{R}P^n\oplus\mathbf{1} = \mathrm{Hom}(\xi_n, \xi_n^\perp\oplus\xi_n) = \mathrm{Hom}(\xi_n, (n+1)\mathbf{1}) = (n+1)\,\mathrm{Hom}(\xi_n, \mathbf{1}) = (n+1)\xi_n$. Равенство $\xi_n^\perp\oplus\xi_n = (n+1)\mathbf{1}$ вытекает из того, что $\mathbb{R}^{n+1}/\ell = \ell^\perp$, а $\ell^\perp\oplus\ell = \mathbb{R}^{n+1}$. Доказательство равенства $\mathrm{Hom}(\xi_n, \mathbf{1}) = \xi_n$ — упражнение. □

Следствие 1. *[теоремы 2 и примера 2] $w(T\mathbb{R}P^n) = (1 + x_n)^{n+1}$.*

Пусть $i_1 + \dots + i_k = m \stackrel{\text{def}}{=} \dim M$; рассмотрим класс когомологий $w_{i_1,\dots,i_k}(M) \stackrel{\text{def}}{=} w_{i_1}(TM)\dots w_{i_k}(TM)\in H^m(M) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Теорема 3. *Пусть $M = \partial N$, где N компактно. Тогда $w_{i_1,\dots,i_k}(M) = 0$ для любого набора индексов.*

Доказательство. Пусть $\iota : M\to N$ — вложение. Тогда $\iota^*TN = TM\oplus\mathbf{1}$ (докажите!). Из теоремы 1 вытекает, что $w_k(TM) = \iota^*w_k(TN)$. Отсюда $\langle w_{i_1,\dots,i_k}(M), [M]_2\rangle = \langle w_{i_1}(TN)\dots w_{i_k}(TN), \iota_*[M]\rangle = 0$, поскольку $\iota_*[M] = 0$. По теореме о двойственности Пуанкаре в размерности $m = \dim M$ класс когомологий равен нулю тогда и только тогда, когда он действует нулем на фундаментальный класс $[M]_2$. □

Следствие 2 (следствия 1 и теоремы 3). *Если $n\neq 2^k - 1$, то $\mathbb{R}P^n$ не является краем компактного многообразия.*

Действительно, только при $n + 1 = 2^k$ имеем $(1 + t)^{n+1} = 1 \bmod 2$.