ЛЕКЦИЯ 2

Краткое содержание. Барицентрическое подразделение, последовательность Майера–Виеториса, гомологии сфер и букетов сфер.

Барицентрическим подразделением стандартного симплекса называется его разбиение $\Delta_n = \bigcup_{\sigma\in\Sigma_{n+1}} \Delta_{n,\sigma}$; здесь Σ_{n+1} — группа перестановок чисел $0, 1, \dots, n$ (всего их $(n+1)!$ штук), а $\Delta_{n,\sigma} = \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta_n \mid x_{\sigma(0)} \le \dots \le x_{\sigma(n)}\}$. Вершины барицентрического подразделения соответствуют непустым подмножествам $A \subset \{0, 1, \dots, n\}$: в вершине, соответствующей A, $x_i = 1/\#A$, если $i \in A$, и $x_i = 0$ для прочих i. Вершины симплекса $\Delta_{n,\sigma}$ соответствуют подмножествам $\{\sigma(0)\}$, $\{\sigma(0), \sigma(1)\}$ и т.д. Для каждого σ зафиксируем аффинное отображение $w_{n,\Sigma} : \Delta_n \to \Delta_{n,\sigma}$, переводящее для каждого $i = 0, \dots, n$ вершину $x_i = 1$ симплекса Δ_n в вершину $\Delta_{n,\sigma}$, соответствующую подмножеству $\{\sigma(0), \dots, \sigma(i-1)\}$.

Определим гомоморфизм $\beta_n : C_n(X, K) \to C_n(X, K)$, заданный на произвольном сингулярном симплексе $f : \Delta_n \to X$ равенством $\beta_n(f) = \sum_{\sigma\in\Sigma_{n+1}} (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)} f \circ w_\sigma$.

Лемма 1. *Гомоморфизмы β_n образуют морфизм комплексов: $\beta_{n-1}\partial_n = \partial_n\beta_n$. Существует цепная гомотопия ψ, соединяющая β с тождественным отображением (т.е. $\beta_n(x) - x = \partial_{n+1}\psi_n(x) - \psi_{n-1}(\partial_n x)$ для произвольного $x \in C_n(X, K)$) и такая, что для произвольного сингулярного n-симплекса f и для всякого i имеет место включение $g_i(\Delta_{n+1}) \subset f(\Delta_n)$, где $\psi_n(f) \stackrel{def}{=} \sum_i k_i g_i$.*

Следствие 1. *Морфизм β действует тривиально на гомологиях: $(\beta_n)_* x = x$ для всякого $x \in H_n(X, K)$.*

Доказательство леммы. Если $u_i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ — стандартное отображение в i-ю грань, то прообразом барицентрического подразделения Δ_n при отображении u_i будет барицентрическое подразделение Δ_{n-1} (почему?). Отсюда вытекает, что β — морфизм комплексов.

Для доказательства второго утверждения построим симплициальное разбиение Ξ призмы $\Delta_n\times[0, 1]$ такое, что $\Delta_n \times \{0\}$ является гранью одного из симплексов (не подразбивается), а на симплексе $\Delta_n \times \{1\}$ возникает барицентрическое подразделение. А именно, симплексы разбиения Ξ нумеруются последовательностями подмножеств $\{0, \dots, n\} = A_0 \supset A_1 \supset \dots \supset A_k = \{i_1, \dots, i_{n+1-k}\}$, где $\#A_i = n + 1 - i$. Вершинами симплекса, соответствующего такой последовательности, являются вершины барицентрического подразделения грани $\Delta_n \times \{1\}$, соответствующие подмножествам $A_0, \dots, A_k$, а также вершины $i_1, \dots, i_{n+1-k}$ грани $\Delta_n \times \{0\}$. Определим теперь гомоморфизм $\psi_n : C_n(X, K) \to C_{n+1}(X, K)$, как в доказательстве теоремы 1 лекции 1; доказательство равенства $\beta_n(x)-x = \partial_{n+1}\psi_n(x)-\psi_{n-1}(\partial_n x)$ аналогично доказательству этой теоремы. Сингулярные симплексы g_i, входящие в $\psi_n(f)$, получаются ограничением отображения $f \times \mathrm{id} : \Delta_n \times [0, 1] \to X$ на симплексы разбиения Ξ; таким образом, включение $g_i(\Delta_{n+1}) \subset f(\Delta_n)$ выполнено. □

Пусть $X = A \cup B$, где $A, B \subset X$ открыты. Обозначим $C_n^{A,B}(X, K)$ свободный K-модуль, порожденный сингулярными сиплексами $f : \Delta_n \to X$ такими, что $f(\Delta_n) \subset A$ или $f(\Delta_n) \subset B$. Очевидно, $\partial_n(C_n^{A,B}(X, K)) \subset C_{n-1}^{A,B}(X, K)$, так что модули $C_n^{A,B}(X, K)$ образуют цепной комплекс.

Теорема 1. *Естественные включения $\iota_n : C_n^{A,B}(X, K) \hookrightarrow C_n(X, K)$ образуют морфизм комплексов и порождают изоморфизм гомологий.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Пусть теперь $x \in C_n(X, K)$, $\partial x = 0$. Согласно лемме 1, при любом N имеем $\partial\beta_*^N x = 0$ и существует y такое, что $x - \beta^N x = \partial y$. Очевидно, $\beta^N x \in C_n^{A,B}(X, K)$ при достаточно большом N. Тем самым каждый класс гомологий имеет представителя в $C_n^{A,B}(X, K)$.

Пусть теперь $x_1, x_2 \in C_n^{A,B}(X, K)$ представляют один и тот же класс в $H_n(X, K)$: $\partial x_1 = \partial x_2 = 0$ и $x_1 - x_2 = \partial y$, где $y \in C_{n+1}(X, K)$. Согласно лемме 1, $\partial y = \partial\beta(y) + \partial\psi\partial y = \partial\beta(y) + \partial\psi(x_1 - x_2)$, причем $\psi(x_1 - x_2) \in C_{n+1}^{A,B}(X, K)$. Повторяя эту процедуру достаточное количество раз, получим, что $x_1 - x_2 = \partial z$, где $z \in C_{n+1}^{A,B}(X, K)$. Тем самым совпадение гомологий доказано. □

Утверждение из гомологической алгебры 2. *Пусть имеется короткая точная последовательность комплексов $0 \to A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{p} C \to 0$. Тогда отображения ι_* и p_* включаются в точную последовательность гомологий $\dots \to H_n(A) \xrightarrow{\iota_*} H_n(B) \xrightarrow{p_*} H_n(C) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \to \dots \xrightarrow{p_*} H_0(C) \to 0$.*

Доказательство. Конструкция гомоморфизма δ_n: пусть $x \in H_n(C)$. Возьмем произвольный представитель $\xi \in C_n$ этого класса гомологий, $\partial_{C,n}\xi = 0$. Поскольку последовательность точная, $p_n : B_n \to C_n$ — сюръекция, так что существует $\eta \in B_n$ такой, что $p_n\eta = \xi$. Тогда $p_{n-1}(\partial_{B,n}\eta) = \partial_{C,n}\xi = 0$ в силу того, что p — морфизм комплексов. Поскольку последовательность комплексов точная, существует (и единствен) элемент $\alpha \in A_{n-1}$ такой, что $\iota_{n-1}\alpha = \partial_{B,n}\eta$. Поскольку ι — морфизм комплексов, имеем $\iota_{n-2}\partial_{A,n-1}\alpha = \partial_{B,n-1}\partial_{B,n}\eta = 0$. Возьмем класс в $H_{n-1}(A)$, представляемый элементом α, в качестве $\delta_n(x)$.

Процесс построения $\delta_n(x)$ неоднозначен в двух местах: выбор представителя ξ класса x и выбор прообраза η элемента ξ. Пусть $\xi' = \xi + \partial_{C,n+1}\varrho$; тогда существует $\lambda \in B_{n+1}$ такой, что $p_{n+1}\lambda = \varrho$ и, следовательно, $p_n(\eta + \partial_{B,n+1}\lambda) = \xi'$. Поскольку $\partial_{B,n}(\eta + \partial_{B,n+1}\lambda) = \partial_{B,n}\eta$, дальнейший процесс не меняется, и $\delta_n(x)$ также остается неизменным. Пусть $\eta' \in B_n$, таков, что $p_n\eta' = \xi$. Тогда $p_n(\eta' - \eta) = 0$ и, следовательно, $\eta' = \eta + \iota_n(\mu)$ для некоторого $\mu \in A_n$. Отсюда вытекает, что $\partial_{B,n}\eta' = \partial_{B,n}\eta + \iota_{n-1}\partial_{A,n}\mu = \iota_{n-1}(\alpha + \partial_{A,n}\mu)$, так что класс гомологий $\delta_n(x)$ определен корректно.

Проверка точности полученной последовательности — упражнение. $\square$

Пусть $X = A \cup B$, где $A, B \subset X$ открыты. Рассмотрим последовательность комплексов $0 \to C(A \cap B, K) \xrightarrow{(\iota_A, -\iota_B)} C(A, K) \oplus C(B, K) \xrightarrow{p} C^{A,B}(X, K) \to 0$; здесь ι_A, ι_B — тавтологические вложения $A \cap B$ в A и B соответственно, а $p(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x + y$. Возникающая, согласно утверждению 2 и теореме 1, точная последовательность гомологий $\dots \to H_n(A \cap B, K) \to H_n(A, K) \oplus H_n(B, K) \to H_n(X, K) \to H_{n-1}(A \cap B, K) \to \dots$ называется последовательностью Майера–Виеториса.

Пример 1. Пусть $X = S^1$, $a, b \in S^1$ — диаметрально противоположные точки, $A = S^1 \setminus \{a\}$, $B = S^1 \setminus \{b\}$. Тогда конечный отрезок последовательности Майера–Виеториса выглядит так: $\dots \to H_1(A) \oplus H_1(B) \to H_1(S^1) \to H_0(A \cap B) \to H_0(A) \oplus H_0(B) \to H_0(S^1) \to 0$. Пространства A, B и S^1 линейно связны, а пространство $A \cap B$ содержит две компоненты. Кроме того, пространства A и B стягиваемы. Тогда из примеров 1–3 лекции 1 и из докзанной там гомотопической инвариантности гомологий вытекает, что отрезок имеет вид $0 \to H_1(S^1) \to K^2 \xrightarrow{\delta_0} K^2 \to K \to 0$, где $\delta_0(x, y) = (x + y, -x - y)$. В силу точности последовательности получаем, что $H_1(S^1) = K$; образующая $H_1(S^1)$ в модуле $C_1^{A,B}(S^1)$ представлена суммой $g_1 + g_2$, где $g_1 : \Delta_1 \to A$, $g_2 = \Delta_1 \to B$ — кривые, для которых $g_1((1,0)) = g_2((0,1))$ и $g_1((0,1)) = g_2((1,0))$. В модуле $C_1(S^1)$ в качестве представителя образующей можно выбрать сингулярный симплекс $g : \Delta_1 \to S^1$, представляющий собой замкнутую кривую индекса 1.

Остальная часть последовательности Майера–Виеториса разбивается на отрезки вида $\dots \to H_n(A) \oplus H_n(B) \to H_n(S^1) \to H_{n-1}(A \cap B) \to \dots$, $n \geq 2$. Согласно примерам 1–3 лекции 1 и в силу гомотопической инвариантности гомологий два крайних члена здесь — нули, откуда $H_n(S^1) = 0$ при $n \geq 2$.

Пример 2. Пусть теперь $X = S^n$ с $n \geq 2$, A и B — как в примере 1. Тогда A и B стягиваемы, а $A \cap B$ гомотопически эквивалентно S^{n-1}. Отрезок последовательности Майера–Виеториса, содержащий H_k, $k \geq 2$, выглядит так: $\dots \to H_k(A) \oplus H_k(B) \to H_k(S^n) \to H_{k-1}(A \cap B) \to H_{k-1}(A) \oplus H_{k-1}(B) \to \dots$. В силу гомотопической инвариантности гомологий получаем, что крайние члены равны нулю, откуда $H_k(S^n)$ изоморфна $H_{k-1}(S^{n-1})$ при $k \geq 2$. По индукции получаем, что $H_n(S^n) = H_0(S^n) = K$, а остальные гомологии S^n нулевые. Также по индукции заключаем, что образующей $H_n(S^n)$ является класс гомологий, представленный суммой $g_1 + g_2$, где $g_1, g_2 : \Delta_n \to S^n$ — проекция стандартного симплекса, вписанного в сферу S^{n-1}, соответственно на верхнее и на нижнее полушарие сферы S^n, в котором описанная сфера S^{n-1} является экватором.

Следствие (примера 2 — теорема Брауэра). *Непрерывное отображение $f : D_k \to D_k$ шара в себя имеет по крайней мере одну неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть это неверно. Сопоставим произвольной точке $x \in D_k$ точку $u(x) \in \partial D_k = S^{k-1}$, являющуюся пересечением ∂D_k с лучом, соединяющим $f(x)$ и x. Отображение u — ретрация $D_k \to \partial D_k$. Поскольку $u|_{\partial D_k} = \mathrm{id}_{S^{k-1}}$ продолжается на весь шар D_k, тождественное отображение сферы S^{k-1} в себя гомотопно отображению в точку. Тогда, согласно теореме о гомотопической инвариантности, оно действует на гомологиях так же, как и отображение в точку.

Отображение f, переводящее топологическое пространство X в точку $a \in Y$, является композицией $g \circ h$, где $h : X \to \mathrm{pt}$ — отображение (единственное) X в одноточечное пространство, а $g : \mathrm{pt} \to Y$ переводит точку в a. Тогда $f_* = g_* \circ h_*$ на любых гомологиях. Поскольку $H_i(\mathrm{pt}) = 0$ при $i > 0$, получаем, что $f_* = 0$ при таких i.

Но $\mathrm{id}_* : H_n(S^n, \mathbb{Z}) \to H_n(S^n, \mathbb{Z})$ — тождественное отображение $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, а не нуль. $\square$

Пример 3. Обобщение примера 2: пусть $X = S^{n_1} \vee \dots \vee S^{n_p}$ — букет сфер, тогда $H_0(X) = K$ и $H_n(X) = K^{\alpha_n}$ при $n > 0$, где $\alpha_n = \#\{i \mid n_i = n\}$. Доказательство аналогично; в качестве A следует взять букет с выкинутой вершиной, в качестве B — букет, в котором из каждой сферы выколота точка. Тогда A и B стягиваемы, а $A \cap B$ гомотопически эквивалентно несвязному объединению сфер размерностей $n_1 - 1, \dots, n_p - 1$. Очевидно, образующими $H_n(X)$ будут такие же циклы, как в случае сферы, в каждой из сфер размерности n, входящих в букет.