ЛЕКЦИИ 3 И 4

Краткое содержание. Отображения букетов сфер. Относительные гомологии, точные последовательности пары и тройки. Гомологии клеточных пространств. Теорема Гуревича.

Пусть X — букет p сфер размерности n, Y — букет q таких же сфер, $u_i : S^n \to X$ — вложение ($i = 1, \dots, k$), переводящее S^n гомеоморфно в i-ю сферу букета, $v_j : Y \to S^n$ — проекция, переводящая j-ю сферу гомеоморфно в S^n, а остальные — в отмеченную точку.

Теорема 1. *Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Обозначим d_{ij} степень отображения $v_j \circ f \circ u_i : S^n \to S^n$. Тогда гомоморфизм $f_* : \mathbb{Z}^p = H_n(X) \to H_n(Y) = \mathbb{Z}^q$ в стандартном базисе представляет собой умножение на матрицу (d_{ij}).*

Доказательство. Любой гомоморфизм $K^p \to K^q$ представляет собой умножение на матрицу с элементами из K. Отображение u_i переводит образующую $H_n(S^n) = K$ в i-ю образующую $H_n(X) = K^p$, так что $(u_i)_* = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ (столбец высотой p, единица на i-ом месте). Аналогично $(v_j)_* = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (строка длиной q, единица на j-м месте).

Пусть теперь $p = 1$, q произвольно. Разделим сферу S^n на q частей гиперплоскостями, проходящими через точку $(1, 0, \dots, 0)$, и пусть $f_q : S^n \to Y$ — непрерывное отображение, переводящее точки, лежащие на гиперплоскостях, в вершину букета, а каждую из q частей — гомеоморфно в соответствующую сферу букета. Для любого i композиция $v_i \circ f_q : S^n \to S^n$ гомотопна тождественному отображению, откуда вытекает, что $(v_i)_*(f_q)_* = 1$, то есть $(f_q)_* = (1, \dots, 1)^T$. Аналогично, если p произвольно, $q = 1$, а $g_p : X \to S^n$ переводит каждую сферу букета в S^n гомеоморфно, то $(g_p)_* = (1, \dots, 1)$.

Отображение $a : S^n \to S^n$ степени $d > 0$ гомотопно композиции $g_d \circ f_d$. Отсюда $a_* = (f_d)_*(g_d)_* = (d)$. Пусть теперь $m : S^n \to S^n$ — симметрия относительно $x_0 = 0$. Рассмотрим отображение $\alpha \overset{\text{def}}{=} m \vee \mathrm{Id} : S^n \vee S^n \to S^n \vee S^n$, которое на первой сфере действует симметрией, а на второй тождественно. Тогда, очевидно, $\alpha_* = \mathrm{diag}(m_*, 1)$. Поскольку $g_2 \circ \alpha$ гомотопно отображению в точку, $m_* = (-1)$. Отсюда следует, что $a_* = (d)$, если a — отображение степени d любого знака.

Для произвольного $f : X \to Y$ теперь $(u_i \circ f \circ v_j)_* = (u_i)_* f_* (v_j)_*$ — $(i.j)$-ый элемент матрицы f_*; он равен степени отображения $u_i \circ f \circ v_j$, то есть d_{ij}. □

Пусть $Y \subset X$ — топологические пространства, и $\iota : Y \to X$ — тавтологическое вложение ($\iota(a) = a$, но в правой части $a \in Y$ рассматривается как точка $a \in X$). В этом случае $\iota_\# : C_n(Y, K) \to C_n(X, K)$ — инъекция, а $\iota^\# : C^n(X, K) \to C^n(Y, K)$ — сюръекция (почему?). Обозначим $C_n(X, Y, K) \overset{\text{def}}{=} C_n(X, K)/\iota_\#(C_n(Y, K))$ и $C^n(X, Y, K) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Ker}\, \iota^\#$; соответственно, $p : C_n(X, K) \to C_n(X, Y, K)$ — проекция на фактор, а $q : C^n(X, Y, K) \to C^n(Y, K)$ — вложение. Нетрудно проверить, что $\iota_\#$, $\iota^\#$, p и q — морфизмы комплексов (перестановочны с дифференциалами), и таким образом возникают комплексы $C_{\bullet}(X, Y, K) \overset{\text{def}}{=} \dots \to C_n(X, Y, K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, Y, K) \to \dots$ и $C^{\bullet}(X, Y, K)$, и точные последовательности комплексов $0 \to C_{\bullet}(Y) \xrightarrow{\iota_\#} C_{\bullet}(X) \xrightarrow{p} C_{\bullet}(X, Y) \to 0$ и $0 \to C^{\bullet}(X, Y) \xrightarrow{p} C^{\bullet}(Y) \xrightarrow{\iota^\#} C^{\bullet}(X) \to 0$. Гомологии комплекса $C_{\bullet}(X, Y, K)$ (соотв., $C^{\bullet}(X, Y, K)$) называются относительными гомологиями (соотв., когомологиями) X по Y и обозначаются $H_*(X, Y, K)$ (соотв., $H^*(X, Y, K)$). Согласно утверждению 2 из гомологической алгебры, существует точная последовательность гомологий $\dots \to H_n(Y) \xrightarrow{\iota_*} H_n(X) \xrightarrow{p_*} H_n(X, Y) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(Y) \to \dots$, называемая точной последовательностью пары, и аналогичная последовательность когомологий.

Пример 1. Пусть $Y \subset X$ состоит из одной точки; относительные гомологии $H_n(X, Y)$ называют в этом случае приведенными гомологиями X и обозначают $\tilde{H}_n(X)$. Из точной последовательности пары при $n \geq 2$ получаем $\dots \to 0 = H_n(\mathrm{pt}) \to H_n(X) \to \tilde{H}_n(X) \to H_{n-1}(\mathrm{pt}) = 0$, так что $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$. Хвост точной последовательности пары выглядит так: $0 = H_1(\mathrm{pt}) \to H_1(X) \to \tilde{H}_1(X) \xrightarrow{\delta} H_0(\mathrm{pt}) = K \xrightarrow{\iota_*} H_0(X) \to \tilde{H}_0(X) \to 0$. Как было доказано в примере 4 лекции 1, отображение ι_* является вложением $K \to H_0(X) = K^{\pi_0(X)}$, переводящим 1 в образующую, соответствующую компоненте линейной связности, содержащей точку Y. Из точности последовательности теперь вытекает, что $\delta = 0$, откуда $\tilde{H}_1(X) = H_1(X)$ и $H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus K$; в частности $\tilde{H}_0(X) = 0$ для линейно связного X.

Абсолютные гомологии тоже можно рассматривать как относительные: $H_*(X) = H_*(X, \varnothing)$; то же самое для когомологий.

Относительные гомологии и когомологии обладают функториальными свойствами, аналогичными свойствам обычных (абсолютных) гомологий. А именно, пусть $Y_1 \subset X_1$, $Y_2 \subset X_2$. Назовем отображением пар $(X_1, Y_1) \to (X_2, Y_2)$ непрерывное отображение $f : X_1 \to X_2$ такое, что $f(Y_1) \subset Y_2$. Гомотопии отображений пар и гомотопическая эквивалентность пар определяются аналогично абсолютному случаю. Тем самым определена гомотопическая категория пар, объекты которой — классы гомотопической эквивалентности пар, а морфизмы — классы гомотопии отображений. Тогда имеет место

Теорема 2. *Относительные гомологии и когомологии определяют, соответственно, ковариантный и контравариантный функтор из гомотопической категории пар в категорию градуированных K-модулей.*

В частности, для каждого непрерывного отображения пар $f : (X_1, Y_1) \to (X_2, Y_2)$ определен гомоморфизм колец $f_* : H_n(X_1, Y_1, K) \to H_n(X_2, Y_2, K)$; для гомотопных отображений этот гомоморфизм одинаков. Гомологии гомотопически эквивалентных пар совпадают. (Аналогично — когомологии.)

Доказательство теоремы 2 такое же, как у соответствующей теоремы для абсолютных гомологий.

Пусть теперь $X = A \cup B$, где $A, B \subset X$ открыты, и пусть $A' = A \cap Y$, $B' = B \cap Y$. Тогда определен комплекс $C^{A,B}_{\bullet}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} C^{A,B}_{\bullet}(X)/C^{A',B'}_{\bullet}(Y)$ и морфизм комплексов $\iota : C^{A,B}_{\bullet}(X, Y) \to C_{\bullet}(X, Y)$.

Теорема 3. *Морфизм ι порождает изоморфизм в гомологиях.*

Доказательство такое же, как у теоремы 1 лекции 2.

Теорема 4. *Пусть X — клеточное пространство, Y — его клеточное подпространство, X/Y — факторпространство X, в котором Y стянуто в точку a. Тогда отображение проекции $p : (X, Y) \to (X/Y, a)$ порождает изоморфизм гомологий $p_* : H_*(X, Y) \to \tilde{H}_*(X/Y)$.*

Доказательство. Пусть CY — конус над пространством Y. Приклеим его к X, отождествляя нижнее основание с $Y \subset X$; полученное пространство обозначим Z. Пространство Z — клеточное; CY — его клеточное подпространство. CY стягивается в точку v (вершину конуса); отсюда, по лемме Борсука (лекция 9 первого семестра) получаем, что существует гомотопия $F_t : X \to X$ такая, что $F_t(Y) \subset Y$, $F_0 = \mathrm{id}$ и $F_1(Y) = \{v\}$. Следовательно, пара (Z, CY) гомотопически эквивалентна паре $(X/Y, v)$, откуда $H_*(Z, CY) = \tilde{H}_*(X/Y)$.

Положим $A = Z \setminus X$ и $B = Z \setminus \{v\}$, где v — вершина конуса. Очевидно, $C^{A,B}_n(Z, CY) = C_n(B, CY \setminus \{v\})$, откуда в силу теоремы 3 вытекает, что $H_*(Z, CY) = H_*(B, CY \setminus \{v\})$. Пара $(B, CY \setminus \{v\})$ гомотопически эквивалентна (X, Y), откуда $H_*(X, Y) = H_*(B, CY \setminus \{v\}) = H_*(Z, CY) = \tilde{H}_*(X/Y)$. □

Пусть теперь $Z \subset Y \subset X$ — топологические пространства. Тогда имеется точная последовательность комплексов $0 \to C_{\bullet}(Y, Z) \to C_{\bullet}(X, Z) \to C_{\bullet}(X, Y) \to 0$; соответствующая точная последовательность гомологий $\dots \to H_n(Y, Z) \to H_n(X, Z) \to H_n(X, Y) \to H_{n-1}(Y, Z) \to \dots$ называется точной последовательностью тройки. Точная последовательность пары — частный случай точной последовательности тройки: $Z = \varnothing$.

Пусть X — клеточное пространство, а $W_n(X, K)$ — свободный K-модуль, порожденный множеством n-мерных клеток. Пусть σ — n-мерная клетка, $\chi_\sigma : D_n \to \overline{\sigma} \subset X$ — характеристическое отображение, и τ — $(n-1)$-мерная клетка, лежащая на границе σ. Обозначим A_τ объединение всех клеток λ размерности $n-1$, кроме τ, а также всех клеток размерности, меньшей $n-1$. Коэффициентом инцидентности $[\sigma : \tau]$ называется степень отображения $S^{n-1} = \partial D_n \xrightarrow{\chi_\sigma} \partial\sigma \xrightarrow{p_\tau} \overline{\tau}/\partial\tau \xrightarrow{\chi_\tau^{-1}} S^{n-1}$, где p_τ — проекция $\partial\sigma \to \partial\sigma/A_\tau$. Определим теперь гомоморфизм модулей $\partial_n : W_n(X) \to W_{n-1}(X)$ условием $\partial_n(\sigma) = \sum_\tau [\sigma : \tau]\tau$ (согласно определению клеточного пространства сумма в правой части конечна).

Теорема 5. *Модули $W_n(X)$ и гомоморфизмы ∂_n образуют комплекс, гомологии которого равны $H_*(X, K)$.*

Прежде чем доказывать теорему, выясним гомологический смысл модулей $W_n(X)$. Согласно определению клеточного пространства фактор $\mathrm{sk}_n(X)/\mathrm{sk}_{n-1}(X)$ — букет n-мерных сфер, взаимно однозначно соответствующих n-мерным клеткам в X. Согласно примеру 3 лекции 2, $W_n(X)$ естественно изоморфен $H_n(\mathrm{sk}_n(X)/\mathrm{sk}_{n-1}(X)) = H_n(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X))$ (последнее равенство — из теоремы 4).

Гомологический смысл имеет и дифференциал ∂_n:

Лемма 1. *Гомоморфизм $\partial_n : W_n(X) = H_n(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X)) \to H_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X)) = W_{n-1}(X)$ совпадает с гомоморфизмом из точной последовательности тройки* $(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X))$.

Доказательство. Пусть D_n — n-мерный шар, $S^{n-1} \subset D_n$ — его граница. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
0 = H_n(D_n) & \to & H_n(D_n, S^{n-1}) & \xrightarrow{p} & H_{n-1}(S^{n-1}) & \to & H_{n-1}(D_n) = 0 \\
 & & \downarrow (\chi_\sigma)_* & & \downarrow (\chi_\sigma)_* & & \\
 & & H_n(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X)) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X)) & & \\
 & & || & & || & & \\
 & & W_n(X) & & W_{n-1}(X) & &
\end{array},$$

в которой первая строка — фрагмент точной последовательности тройки $(D_n, S^{n-1}, \varnothing)$ (т.е. точной последовательности пары (D_n, S^{n-1})), а вторая — фрагмент точной последовательности тройки $(\operatorname{sk}_n(X), \operatorname{sk}_{n-1}(X), \operatorname{sk}_{n-2}(X))$. Шар D_n стягиваем, так что $H_n(D_n) = H_{n-1}(D_n) = 0$ в силу гомотопической инвариантности гомологий (мы предполагаем $n \geq 2$; случай $n = 1$ — упражнение, ответ там такой же). Согласно примеру 2 лекции 2, $H_{n-1}(S^{n-1}) = K$, откуда в силу точности последовательности (или по теореме 4) $H_n(D_n, S^{n-1}) = K$ и p — изоморфизм.

По определению характеристического отображения и в силу описания гомологий сферы, приведенного в примере 2 лекции 2, $(\chi_\sigma)_*(1)$ — образующая $a_\sigma \in W_n(X)$, соответствующая клетке σ. В силу коммутативности $\delta(a_\sigma) = (\chi_\sigma)_*(p(1)) = (\chi_\sigma)_*(1)$. Согласно теореме 2 лекции 2, $(\chi_\sigma)_*(1) = \sum_\tau [\sigma : \tau] a_\tau = \partial(a_\sigma)$. □

Доказательство теоремы 5. Пусть $x \in W_n(X) = H_n(\operatorname{sk}_n(X), \operatorname{sk}_{n-1}(X))$. Это означает, что x — множество относительных циклов, т.е. сингулярных цепей в $\operatorname{sk}_n(X)$, границы которых лежат в $\operatorname{sk}_{n-1}(X)$. Тогда $\partial_n(x) \in W_{n-1}(X)$ — упомянутая граница. Теперь $\partial_{n-1}(\partial_n(x)) = 0$, потому что граница границы равна нулю ($\partial^2 = 0$ в сингулярном комплексе). Тем самым $W_n(X)$ и ∂_n образуют комплекс.

Точная последовательность тройки $(\operatorname{sk}_{n+1}(X), \operatorname{sk}_n(X), \operatorname{sk}_{n-2}(X))$ содержит фрагмент $W_{n+1}(X) = H_{n+1}(\operatorname{sk}_{n+1}(X), \operatorname{sk}_n(X)) \xrightarrow{\delta} H_n(\operatorname{sk}_n(X), \operatorname{sk}_{n-2}(X)) \xrightarrow{\alpha} H_n(\operatorname{sk}_{n+1}(X), \operatorname{sk}_{n-2}(X)) \to H_n(\operatorname{sk}_{n+1}(X), \operatorname{sk}_n(X))$. Поскольку $\operatorname{sk}_{n+1}(X)/\operatorname{sk}_n(X)$ — букет $(n+1)$-мерных сфер, последний член равен нулю, и α — эпиморфизм, откуда $H_n(\operatorname{sk}_{n+1}(X), \operatorname{sk}_{n-2}(X)) = H_n(\operatorname{sk}_n(X), \operatorname{sk}_{n-2}(X))/\operatorname{Im}\delta$.

Точная последовательность тройки $(\operatorname{sk}_n(X), \operatorname{sk}_{n-1}(X), \operatorname{sk}_{n-2}(X))$ содержит фрагмент $H_n(\operatorname{sk}_{n-1}(X), \operatorname{sk}_{n-2}(X)) \to H_n(\operatorname{sk}_n(X), \operatorname{sk}_{n-2}(X)) \xrightarrow{\beta} H_n(\operatorname{sk}_n(X), \operatorname{sk}_{n-1}(X)) = W_n(X) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(\operatorname{sk}_{n-1}(X), \operatorname{sk}_{n-2}(X)) = W_{n-1}(X)$. Поскольку $\operatorname{sk}_{n-1}(X)/\operatorname{sk}_{n-2}(X)$ — букет $(n-1)$-мерных сфер, первый член равен нулю, и β — мономорфизм. Отсюда $H_n(\operatorname{sk}_{n+1}(X), \operatorname{sk}_{n-2}(X)) = \operatorname{Im}\beta/\operatorname{Im}(\beta\circ\delta) = \operatorname{Ker}\partial_n/\operatorname{Im}(\beta\circ\delta)$. Из определения точной последовательности тройки нетрудно убедиться, что $\beta\circ\delta = \partial_{n+1}$. Следовательно, n-ые гомологии клеточного комплекса равны $H_n^W(X) = \operatorname{Ker}\partial_n/\operatorname{Im}\partial_{n+1} = H_n(\operatorname{sk}_{n+1}(X), \operatorname{sk}_{n-2}(X))$.

Для всякого $m \leq n-2$ точная последовательность тройки $(\operatorname{sk}_{n+1}(X), \operatorname{sk}_m(X), \operatorname{sk}_{m-1}(X))$ содержит фрагмент $H_n(\operatorname{sk}_m(X), \operatorname{sk}_{m-1}(X)) \to H_n(\operatorname{sk}_{n+1}(X), \operatorname{sk}_{m-1}(X)) \to H_n(\operatorname{sk}_{n+1}(X), \operatorname{sk}_m(X)) \to H_{n-1}(\operatorname{sk}_m(X), \operatorname{sk}_{m-1}(X))$. Поскольку $\operatorname{sk}_m(X)/\operatorname{sk}_{m-1}(X)$ представляет собой букет m-мерных сфер, крайние члены фрагмента равны нулю, откуда $H_n(\operatorname{sk}_{n+1}(X), \operatorname{sk}_m(X)) = H_n(\operatorname{sk}_{n+1}(X), \operatorname{sk}_{m-1}(X))$ — следовательно, $H_n^W(X) = H_n(\operatorname{sk}_{n+1}(X), \operatorname{sk}_{n-2}(X)) = H_n(\operatorname{sk}_{n+1}(X), \operatorname{sk}_{n-3}(X)) = \dots = H_n(\operatorname{sk}_{n+1}(X))$ (поскольку $\operatorname{sk}_{-1}(X) = \varnothing$).

Для всякого $m \geq n+1$ точная последовательность пары $(\operatorname{sk}_{m+1}(X), \operatorname{sk}_m(X))$ содержит фрагмент $H_{n+1}(\operatorname{sk}_{m+1}(X), \operatorname{sk}_m(X)) \to H_n(\operatorname{sk}_m(X)) \to H_n(\operatorname{sk}_{m+1}(X)) \to H_n(\operatorname{sk}_{m+1}(X), \operatorname{sk}_m(X))$. Поскольку $\operatorname{sk}_{m+1}(X)/\operatorname{sk}_m(X)$ представляет собой букет $(m+1)$-мерных сфер, крайние члены фрагмента равны нулю, откуда $H_n(\operatorname{sk}_m(X)) = H_n(\operatorname{sk}_{m+1}(X))$, и $H_n^W(X) = H_n(\operatorname{sk}_m(X))$ для всякого $m \geq n+1$. В силу компактности симплекса любой сингулярный симплекс в клеточном пространстве целиком лежит в каком-нибудь остове; отсюда вытекает, что $H_n^W(X) = H_n(X)$. □

Аналогичная теорема имеет место для когомологий.

Пример 2. Пусть $X = \mathbb{C}P^n$. Обозначим $e^{(2k)} = \{[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}P^n \mid z_{k+1} = \dots = z_n = 0, z_k \neq 0\}$; здесь $0 \leq k \leq n$. Подножества $e^{(2k)} \subset \mathbb{C}P^n$ образуют клеточное разбиение: характеристическое отображение $\chi^{(2k)} : D_{2k} = \{(w_0, \dots, w_{k-1}) \in \mathbb{C}^k \mid |w_0|^2 + \dots + |w_k|^2 \leq 1\} \to \mathbb{C}P^n$ задано формулой $\chi^{(2k)}(w_0, \dots, w_{k-1}) = [w_0 : \dots : w_{k-1} : \sqrt{1 - (|w_0|^2 + \dots + |w_k|^2)} : 0 : \dots : 0]$ (докажите, что это действительно характеристическое отображение!). Построенное клеточное разбиение содержит одну клетку каждой четной размерности $0, 2, \dots, 2n$. Тем самым клеточный комплекс выглядит как $K \to 0 \to K \to \dots \to 0 \to K$; очевидно, все стрелки нулевые, откуда $H_{2s}(X, K) = H^{2s}(X, K) = K$ при $0 \leq s \leq n$, а остальные гомологии и когомологии равны нулю. В частности, отсюда вытекает, что комплексные проективные пространства разной размерности гомотопически не эквивалентны.

Пример 3. $X = \mathbb{R}P^n$ с однородными координатами $[x_0 : \dots : x_n]$. Положим $e^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_k \neq 0, x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$. Характеристическое отображение $\chi^{(k)} : D_k \to \mathbb{R}P^n$, где D_k — k-мерный шар радиуса 1 с центром в нуле, определяется так же, как в примере 2. Отображение $\chi^{(k)}$ взаимно однозначно на внутренности шара; точка границы $x = [x_0 : \dots : x_n] \in \partial e^{(k)} = \overline{e^{(k)}} \setminus e^{(k)} = e^{(0)} \cup \dots \cup e^{(k-1)}$ имеет два прообраза, $y = \pm(x_0, \dots, x_{k-1})/\sqrt{x_0^2 + \dots + x_{k-1}^2}$. На границе сферы $\chi^{(k)}$ четное: $\chi^{(k)}(-y) = \chi^{(k)}(y)$ при $y_1^2 + \dots + y_k^2 = 1$. Поэтому знаки двух прообразов отличаются умножением на знак определителя производной "антиподального" отображения $y \to -y$ сферы S^{k-1}. Нетрудно проверить, что этот знак равен $(-1)^k$, так что $[e^{(k)} : e^{(k-1)}] = 1 + (-1)^k$. Тем самым клеточный комплекс выглядит так: $K \xrightarrow{1+(-1)^n} \dots \xrightarrow{0} K \xrightarrow{\times 2} K \xrightarrow{0} K$.

Если $2 = 0$ в кольце K, то все дифференциалы нулевые и $H_s(\mathbb{R}P^n; K) = K$ при $0 \leq s \leq n$. Если $2 \neq 0$, то $H_0(\mathbb{R}P^n; K) = K$, $H_s(\mathbb{R}P^n; K) = K/2K$ при s нечетном и меньшем n; $H_s(\mathbb{R}P^n; K) = \operatorname{Ker}(\times 2)$ при s четном от 2 до $n-1$ (ядро оператора $K \to K$, умножающего каждый элемент на 2); $H_n(\mathbb{R}P^n; K) = K$ при n

нечетном и $H_n(\mathbb{R}P^n; K) = 0$ при n четном. Отсюда, в частности, вытекает, что вещественные проективные пространства разной размерности гомотопически не эквивалентны.

Еще пример применения теоремы 5:

Пример 4. Пусть $m < n$; рассмотрим пространства $X = \mathbb{R}P^m \times S^n$ и $Y = S^m \times \mathbb{R}P^n$ и в них клеточные разбиения — произведения стандартных клеточных разбиений сферы (из двух клеток) и проективного пространства (по одной клетке каждой размерности). Из теоремы 5 вытекает, что $H_*(X, \mathbb{Z}) = H_*(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}) \otimes H_*(S^n, \mathbb{Z})$ и $H_*(Y, \mathbb{Z}) = H_*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) \otimes H_*(S^m, \mathbb{Z})$ (тензорное произведение градуированных $\mathbb{Z}$-модулей). Эти градуированные модули не изоморфны: например, в пространстве X отсутствуют клетки размерностей $m+1 \le i \le n-1$ и, следовательно, $H_i(X) = 0$ при таких i. В то же время $H_i(Y)$ всегда содержит в качестве прямого слагаемого $H_i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) \otimes H_0(S^m, \mathbb{Z}) = H_i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z})$. Согласно примеру 3, целочисленные гомологии проективного пространства с нечетными номерами, меньшими размерности, отличны от нуля; поэтому если $n \ge m+3$, то среди групп $H_i(Y)$ с $m+1 \le i \le n-1$ обязательно найдется ненулевая, и $H_*(Y) \ne H_*(X)$. (При $n = m+1$ и $n = m+2$ гомологии тоже не изоморфны; доказательство — упражнение.) Отсюда вытекает, что X и Y гомотопически не эквивалентны.

В то же время X и Y имеют одинаковые гомотопические группы всех порядков. Действительно, $\pi_1(X) = \pi_1(Y) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, а при $k > 2$ имеет место равенство $\pi_k(X) = \pi_k(S^m \times S^n) = \pi_k(Y)$, поскольку пространство $S^m \times S^n$ накрывает (двулистно) как X, так и Y.

Лемма 2. *Пусть X — линейно связное клеточное пространство с единственной нульмерной клеткой, у которого $\pi_1(X) = \dots = \pi_n(X) = 0$. Тогда существует клеточное пространство Y, гомотопически эквивалентное X, у которого единственная нульмерная клетка и отсутствуют клетки размерностей $1, 2, \dots, n$.*

Доказательство. Доказательство индукцией по n: пусть в X уже отсутствуют клетки размерности $1, 2, \dots, n-1$. Тогда $\operatorname{sk}_n(X)$ — букет n-мерных сфер, вершина которого — нульмерная клетка $e^{(0)}$. Пусть $e_\alpha^{(n)}$ — n-мерная клетка; тогда характеристическое отображение $h_0^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \chi_\alpha^{(n)} : D_n \to X$ — сфероид. Поскольку $\pi_n(X) = 0$, этот сфероид стягиваем, причем по теореме о клеточной аппроксимации существует гомотопия $h^\alpha : D_{n+1} = D_n \times [0,1] \to \operatorname{sk}_{n+1}(X)$, соединяющая его с отображением в точку $e^{(0)}$. Приклеим для каждого α к X шар D_{n+2} по отображению h^α, где D_{n+1} отождествляется с нижней половиной границы $S^{n+1} = \partial D_{n+2}$. Поскольку шар ретрагируется на нижнюю полусферу своей границы, получится пространство X', гомотопически эквивалентное X. Разобьем пространство X' на клетки — к клеткам X добавим $e_\alpha^{(n+2)}$ (приклеенный шар) и $e_\alpha^{(n+1)}$ (верхнюю половину его границы) для каждой n-мерной клетки $e_\alpha^{(n)}$. Пусть теперь Z — замыкание объединения $e_\alpha^{(n+1)}$ (в частности, все $e_\alpha^{(n)}$ лежат в Z) и $Y = X/Z$ (стягиваем Z в точку).

Очевидно, Y — клеточное пространство с клеточным разбиением, не содержащим клеток размерности от 1 до n. Множество Z стягиваемо в точку $e^{(0)}$. По теореме Борсука, существует гомотопия $g_t : X' \to X'$ такая, что $g_0 = \mathrm{id}_{X'}$, а $g_1(Z) = \{e^{(0)}\}$. Тем самым g_1 можно рассматривать как отображение $Y = X'/Z \to X'$. Это отображение и естественная проекция $p : X' \to X'/Z = Y$ составляют гомотопическую эквивалентность Y и X'. Следовательно, Y гомотопически эквивалентно X. □

Следствие 1 (теорема Гуревича)**.** *Пусть X — линейно связное клеточное пространство с единственной нульмерной клеткой, у которого $\pi_1(X) = \dots = \pi_{n-1}(X) = 0$. Тогда $H_1(X) = \dots = H_{n-1}(X) = 0$, а $H_n(X, \mathbb{Z})$ изоморфно $\pi_n(X)$, если $n \ge 2$, и изоморфно фактору $\pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$, если $n = 1$. Если $Y \subset X$ — клеточное подпространство X, причем $\pi_1(X, Y) = \dots = \pi_{n-1}(X, Y) = 0$ для некоторого $n \ge 2$, то $H_1(X, Y) = \dots = H_{n-1}(X, Y) = 0$, а $H_n(X, Y, \mathbb{Z}) = \pi_n(X, Y)$ при $n > 2$, и $\pi_2(X, Y)/[\pi_2(X, Y), \pi_2(X, Y)]$ при $n = 2$.*

Доказательство. Согласно лемме 2, можно считать, что в клеточном разбиении X отсутствуют клетки размерностей $1, 2, \dots, n-1$. Тогда в клеточном комплексе X стоят нули после $W_n(X)$. Тогда $H_i(X) = 0$ при $1 \le i \le i-1$. а $H_n(X) = W_n(X)/\operatorname{Im} \partial_{n+1}$. При $n = 1$ утверждение вытекает из формулы для коэффициента инцидентности и теоремы 3 лекции 9 первого семестра, а при $n > 1$ — из аналогичной теоремы для π_n (первой нетривиальной гомотопической группы клеточного пространства), которая в курсе не упоминалась, но доказывается аналогично. Аналогичные формулы имеют место для первой нетривиальной относительной гомотопической группы, что в сочетании с теоремой 4 доказывает последнее утверждение. □

Рассмотрим теперь точную гомотопическую последовательность пары $(\operatorname{sk}_n(X), \operatorname{sk}_{n-1}(X))$, где X — произвольное клеточное пространство. Из теоремы о клеточной аппроксимации вытекает, что отображение $\iota_* : \pi_k(\operatorname{sk}_{n-1}(X)) \to \pi_k(\operatorname{sk}_n(X))$ — эпиморфизм при $k \le n-1$ (и изоморфизм при $k \le n-2$). Отсюда во фрагменте $\pi_k(\operatorname{sk}_n(X)) \to \pi_k(\operatorname{sk}_n(X), \operatorname{sk}_{n-1}(X)) \to \pi_{k-1}(\operatorname{sk}_{n-1}(X))$ обе стрелки нулевые, откуда в силу точности $\pi_k(\operatorname{sk}_n(X), \operatorname{sk}_{n-1}(X)) = 0$. Из следствия вытекает, что $\pi_n(\operatorname{sk}_n(X), \operatorname{sk}_{n-1}(X)) = H_n(\operatorname{sk}_n(X), \operatorname{sk}_{n-1}(X)) = W_n(X)$ (n-е пространство клеточного комплекса X). Как нетрудно видеть, дифференциал $\partial : W_n(X) \to$

$W_{n-1}(X)$ равен композиции отображения $\pi_n(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X)) \to \pi_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}(X))$ из точной последовательности пары $(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X))$ и проекции $\pi_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}(X)) \to \pi_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}(X), \mathrm{sk}_{n-2}(X))$.