ЛЕКЦИЯ 5

Краткое содержание. Теория препятствий. Теорема Хопфа.

Пусть X — клеточное пространство, Y — топологическое пространство, для которого действие группы π_1 на всех группах π_n тривиально (например, Y односвязно). Пусть $f : \mathrm{sk}_{n-1}(X) \to Y$ — непрерывное отображение. Пусть $e^{(n)}$ — n-мерная клетка в X с характеристическим отображением $\chi : D_n \to X$; тогда $f_e \stackrel{\text{def}}{=} f \circ \chi|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to Y$ — сфероид. Мы можем рассмотреть класс $[f_e] \in \pi_{n-1}(Y)$ (поскольку действие $\pi_1(Y)$ на $\pi_{n-1}(Y)$ тривиально, можно не указывать отмеченную точку); полученное соответствие $e \mapsto [f_e]$ определяет элемент $c_f \in W^n(X, \pi_{n-1}(Y))$ (клеточную n-коцепь в X со значениями в $\pi_{n-1}(Y)$). Очевидно, f можно продолжить на клетку $e^{(n)}$ тогда и только тогда, когда f_e стягиваемо, а на весь остов $\mathrm{sk}_n(X)$ — тогда и только тогда, когда $c_f = 0$.

Теорема 1. *Коцепь c_f является коциклом: $\delta c_f = 0$.*

Доказательство. Заметим, что $c_f = f_* c_{\iota_{n-1}}$, где $\iota_{n-1} : \mathrm{sk}_{n-1}(X) \to X$ — вложение, а гомоморфизм $f_* : \pi_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}(X)) \to \pi_{n-1}(Y)$ применяется к значениям коцепи $c_{\iota_{n-1}}$ и, следовательно, коммутирует с дифференциалом. Таким образом, достаточно доказать, что $\delta c_{\iota_{n-1}} = 0$.

Коцепь $c_{\iota_{n-1}}$ ставит в соответствие клетке e гомотопический класс ограничения $\chi_e|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to \mathrm{sk}_{n-1}(X)$. Согласно сказанному в конце предыдущей лекции $W_n(X) = \pi_n \mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X)$; тогда коцепь $c_{\iota_{n-1}}$ равна отображению $\pi_n \mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X) \to \pi_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1}(X))$ из точной последовательности пары. Поскольку дифференциал в клеточном комплексе равен композиции некоторого гомоморфизма и отображения $\pi_n(\mathrm{sk}_n(X)) \to \pi_n(\mathrm{sk}_n(X), \mathrm{sk}_{n-1}(X))$ из той же самой точной последовательности, имеем $c_{\iota_{n-1}}(u) = c_{\iota_{n-1}}(\partial u) = 0$ в силу точности последовательности пары. □

Теорема 2. *Пусть f и g — непрерывные отображения $\mathrm{sk}_{n-1}(X) \to Y$, причем $f|_{\mathrm{sk}_{n-2}(X)} = g|_{\mathrm{sk}_{n-2}(X)}$. Тогда существует коцепь $d_{f,g} \in C^{n-1}(X, \pi_{n-1}(Y))$ такая, что $c_f - c_g = \delta d_{f,g}$.*

Доказательство. Для произвольной $(n-1)$-мерной клетки e определим отображение $\varrho_{f,g}^{(e)} : S^{n-1} \to Y$, равное на верхней полусфере $f \circ \chi_e$, а на нижней $g \circ \chi_e$ (на экваторе эти формулы дают одно и то же, т.к. χ_e переводит экватор в $\mathrm{sk}_{n-2}(X)$). Положим теперь $d_{f,g}(e) = [\varrho_{f,g}^{(e)}]$. Пусть теперь u — n-мерная клетка X. Тогда $\delta d_{f,g}(u) = d_{f,g}(\partial u) = d_{f,g}(\sum_e [u:e]e) = \sum_v [\varrho_{f,g}^{(e)} \circ \chi_e^{-1} \circ \chi_u|_{S^{n-1}}]$. Заметим теперь, что сумма сфероидов в правой части равенства гомотопна разности сфероидов $[f \circ \chi_u|_{S^{n-1}}] - [g \circ \chi_u|_{S^{n-1}}] = c_f(u) - c_g(u)$. □

Когомологический класс $C_f \in H^n(X, \pi_{n-1}(Y))$ коцикла c_f называется препятствием к продолжению отображения f на $\mathrm{sk}_n(X)$. Из теоремы вытекает, что если два отображения совпадают на $\mathrm{sk}_{n-2}(X)$, то соответствующие классы одинаковы.

Следствие 1. *Препятствие $C_f = 0$ тогда и только тогда, когда существует отображение $F : \mathrm{sk}_n(X) \to Y$ такое, что $F|_{\mathrm{sk}_{n-2}(X)} = f|_{\mathrm{sk}_{n-2}(X)}$.*

Доказательство. "Тогда" вытекает из теоремы ($c_F = 0$, поскольку F определено на $\mathrm{sk}_n(X)$. Для доказательства "только тогда" достаточно построить отображение $g : \mathrm{sk}_{n-1}(X) \to Y$, совпадающее с f на $\mathrm{sk}_{n-2}(X)$ и такое, что $d_{f,g}$ — произвольная заранее заданная коцепь; построение такого g — упражнение. □

Пусть теперь $Z \subset X$ — клеточное подпространство, и f определено на $Z \cup \mathrm{sk}_{n-1}(X)$. Тогда аналогично c_f определена коцепь $c_{f,Z} \in C^n(X, Z, \pi_{n-1}(Y))$, препятствующая продолжению f на $Z \cup \mathrm{sk}_n(X)$. Аналогично теореме 1 доказывается, что $c_{f,Z}$ — коцикл (относительный), аналогично теореме 2 и следствию 1 доказывается, что класс (относительное препятствие) $C_{f,Z} = [c_{f,Z}] \in H^n(X, Z, \pi_{n-1}(Y))$ зависит только от ограничения f на $Z \cup \mathrm{sk}_{n-2}(X)$ и равен нулю тогда и только тогда, когда существует $F : Z \cup \mathrm{sk}_n(X) \to Y$, совпадающий с f на $Z \cup \mathrm{sk}_{n-2}(X)$.

Пусть $f, g : A \to Y$ и $f|_{\mathrm{sk}_{n-1}(A)} = g|_{\mathrm{sk}_{n-1}(A)}$. Пусть $X = A \times [0,1]$ и $Z = A \times \{0,1\}$; зададим отображение $F : Z \cup \mathrm{sk}_n(X) \to Y$ формулами $F(a,0) = f(a)$, $F(a,1) = g(a)$, $F(a,t) = f(a) = g(a)$ при $a \in \mathrm{sk}_{n-1}(A)$. Продолжение этого отображения на $\mathrm{sk}_{n+1}(X)$ это гомотопия, соединяющая f с g на $\mathrm{sk}_n(A)$ и неподвижная на $\mathrm{sk}_{n-1}(A)$. Препятствующая коцепь к существованию такого продолжения лежит в $C^{n+1}(A \times [0,1], A \times \{0,1\}, \pi_n(Y)) = C^n(A, \pi_n(Y))$; нетрудно проверить, что она равна $d_{f,g}$. Эта коцепь — коцикл, согласно теореме 2: $\delta d_{f,g} = c_f - c_g = 0$, поскольку f и g определены на всем пространстве A. Из следствия 1 (точнее, из его аналога для относительных препятствий) вытекает, что f и g гомотопны на $\mathrm{sk}_{n+1}(X)$ (гомотопия неподвижна на $\mathrm{sk}_{n-1}(X)$) тогда и только тогда, когда класс когомологий $D_{f,g} = [d_{f,g}] \in H^n(A, \pi_n(Y))$ нулевой.

Теорема 3 (теорема Хопфа)**.** *Пусть X — n-мерное клеточное пространство. Отображения $f, g : X \to S^n$ гомотопны тогда и только тогда, когда $f^*(1) = g^*(1) \in H^n(X, \mathbb{Z})$, где $1 \in H^n(S^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ — стандартная образующая.*

Доказательство. Если f и g гомотопны, то равенство $f^*(1) = g^*(1)$ следует из гомотопической инвариантности отображений f^*. Обратно, пусть $f^*(1) = g^*(1)$. Пусть f и g совпадают на $\mathrm{sk}_k(X)$. Тогда препятствие к построению гомотопии между f и g на $\mathrm{sk}_{k+1}(X)$, неподвижной на $\mathrm{sk}_{k-1}(X)$, лежит в группе $H^{k+1}(X, \pi_{k+1}(S^n))$; поэтому если $k < n-1$, это препятствие нулевое (поскольку группа коэффициентов нулевая). Если $k = n-1$, то препятствие лежит в $H^n(X, \mathbb{Z})$ и равно $D_{f,g} = C_f - C_g = D_{f,pt} - D_{g,pt}$, где pt — отображение в точку. По определению различающей коцепи $D_{f,pt} = f^*(1)$, откуда вытекает, что препятствие опять нулевое — следовательно, f и g гомотопны на $\mathrm{sk}_n(X) = X$. □

Теорема 4 (теорема Брушлинского)**.** *Для всякого клеточного пространства X отображения $f, g : X \to S^1$ гомотопны тогда и только тогда, когда $f^*(1) = g^*(1) \in H^1(X, \mathbb{Z})$.*

Доказательство аналогично; препятствия к построению гомотопии на остовах с номерами, большими 1, нулевые, поскольку $\pi_k(S^1) = 0$ при $k > 1$.