ЛЕКЦИЯ 6

Краткое содержание. Умножение в когомологиях.

Пусть X — произвольное топологическое пространство, K — кольцо. Для произвольного n и произвольного набора индексов $i_1, \dots, i_s$ обозначим $u_{i_1,\dots,i_s} : \Delta_{s-1} \to \Delta_n$ аффинное отображение, переводящее вершину $x_k = 1$ стандартного симплекса Δ_{s-1} в вершину $x_{i_k} = 1$ стандартного симплекса Δ_n. Пусть $p \in C^m(X,K)$, $q \in C^n(X,K)$ и $f \in C_{n+m}(X,K)$; определим коцепь $p \cup q \in C^{m+n}(X,K)$ равенством $(p \cup q)(f) = p(f \circ u_{0,\dots,m})q(f \circ u_{m,\dots,m+n})$.

Лемма 1. *Операция $\cup$ ассоциативна. Для произвольного непрерывного отображения $F : Y \to X$ верно равенство $F^{\#}(p \cup q) = F^{\#}p \cup F^{\#}q$. Кроме того, имеют место равенства $\delta(p \cup q) = \delta p \cup q + (-1)^m p \cup \delta q$ и $q \cup p = (-1)^{mn}(p \cup q) \circ u_{m+n,m+n-1,\dots,0}$.*

Доказательство — прямая проверка.

Следствие 1. *Операция $\cup$ задает билинейное (над K) ассоциативное умножение $\cup : H^m(X,K) \otimes H^n(X,K) \to H^{n+m}(X,K)$. Для всякого непрерывного отображения $F : Y \to X$ отображение $F^* : H^*(X,K) \to H^*(Y,K)$ является гомоморфизмом колец. Имеет место равенство $p \cup q = (-1)^{mn} q \cup p$, где $p \in H^m(X,K)$, $q \in H^n(X,K)$. Иными словами, $H^*(\cdot, K)$ является функтором из гомотопической категории топологических пространств в категорию градуированных ассоциативных суперкоммутативных K-алгебр.*

Доказательство. Если $\delta p_1 = 0 = \delta q$ и $p_1 = p_2 + \delta p$, то согласно лемме $p_1 \cup q = p_2 \cup q + \delta(p \cup q)$, откуда вытекает, что оператор $\cup$ определен на когомологиях. Второе утверждение вытекает из второго утверждения леммы.

Для доказательства третьего утверждения (суперкоммутативность) построим семейство отображений $\psi_n : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ (цепную гомотопию) такую, что $f + f \circ u_{0,1,\dots,i-1,i+1,i,i+2,\dots,n} = \partial \psi_n(f) + \psi_{n-1}(\partial f)$. Для этого рассмотрим триангуляцию призмы $\Delta_n \times [0,1]$, описанную в лекции 1, и отображение $F : \Delta_n \times [0,1] \to X$, совпадающее с f на нижнем основании и с $f \circ u_{0,1,\dots,i-1,i+1,i,i+2,\dots,n}$ — на верхнем. Теперь в качестве $\psi(f)$ возьмем знакопеременную сумму ограничений F на симплексы триангуляции (предварительно каждый симплекс отождествим со стандартным, как в лекции 1). Тем самым перестановка двух координат в сингулярном симплексе порождает смену знака в гомологиях; отсюда перестановка всех переменных в обратном порядке (отображение $u_{n,n-1,\dots,0}$) порождает умножение на $(-1)^{n(n-1)/2}$, откуда вытекает третье утверждение. □

Аналогичным образом определяется умножение $H^m(X,Y) \otimes H^n(X,Y) \to H^{m+n}(X,Y)$; утверждения следствия 1 верны и для этого умножения тоже.

Пусть теперь X_1, X_2 — клеточные пространства, $u \in W^{n_1}(X_1,K)$, $v \in W^{n_2}(X_2,K)$ — клеточные коцепи. Определим коцепь $u \times v \in W^{n_1+n_2}(X_1 \times X_2, K)$, значение которой на клетке $e_1^{(n_1)} \times e_2^{(n_2)}$, где $e_1^{(n_1)}$ и $e_2^{(n_2)}$ — клетки в X_1 и X_2 размерностей n_1 и n_2 соответственно, равно $(-1)^{n_1 n_2} u(e_1^{(n_1)}) v(e_2^{(n_2)})$. Непосредственно проверяется, что $\delta(u \times v) = \delta u \times v + (-1)^n u \times \delta v$, откуда следует, что определена билинейная операция $\times : H^{n_1}(X_1,K) \otimes H^{n_2}(X_2,K) \to H^{n_1+n_2}(X_1 \times X_2, K)$. Аналогично определяется операция в относительных когомологиях $H^{n_1}(X_1,Y_1,K) \otimes H^{n_2}(X_2,Y_2,K) \to H^{n_1+n_2}(X_1 \times X_2, X_1 \times Y_2 \cup Y_1 \times X_2, K)$.

Пример 1. Пусть $X_1 = \Delta_{n_1}$, $X_2 = \Delta_{n_2}$ — стандартные симплексы, $K = \mathbb{Z}$. Тогда $H^{n_1}(X_1, \partial X_1) = H^{n_2}(X_2, \partial X_2) = H^{n_1+n_2}(X_1 \times X_2, \partial X_1 \times X_2 \cup X_1 \times \partial X_2) = \mathbb{Z}$ в силу теоремы Борсука и равенства $\partial(X_1 \times X_2) = \partial X_1 \times X_2 \cup X_1 \times \partial X_2$. Образующей группы $H^{n_1}(X_1, \partial X_1)$ является класс $[\varphi_1]$, где φ_1 — коцепь, принимающая значение 1 на сингулярной цепи $\mathrm{id}_{X_1} : \Delta_{n_1} \to X_1$ и значение 0 на всех сингулярных n_1-цепях, образы которых лежат в ∂X_1; аналогично — φ_2.

Обозначим $v_0, \dots, v_{n_1}$ вершины симплекса X_1, а $w_0, \dots, w_{n_2}$ — вершины X_2. Триангулируем произведение $X_1 \times X_2$: для каждого набора пар $I = \{(i_0, j_0), \dots, (i_{n_1+n_2}, j_{n_1+n_2})\}$ таких, что $i_0 \le i_1 \le \dots$, $j_0 \le j_1 \le \dots$ и $i_k + j_k = k$ при всех $k = 0, \dots, n_1+n_2$, пусть D_I — симплекс с вершинами (v_{i_k}, w_{j_k}), $k = 0, \dots, n_1+n_2$, а $u_I : \Delta_{n_1+n_2} \to D_I$ — аффинное отображение, переводящее вершину номер k в (v_{i_k}, w_{j_k}) для всех k. Сумма $u = \sum_I u_I$ — сингулярная цепь, представляющая образующую в $H_{n_1+n_2}(X_1 \times X_2)$. Согласно определению умножения, $(p_1^* a_1 \cup p_2^* a_2)(u) = \sum_I a_1(p_1 \circ u_{i_0,\dots,i_{n_1}}) a_2(p_2 \circ u_{j_{n_1},\dots,j_{n_1+n_2}}))$ (аффинные отображения $u_{k_0,\dots,k_s}$ переводят m-ю вершину симплекса Δ_s в k_m-ю вершину симплекса-образа, для всех m). Для всех членов этой суммы либо сингулярный симплекс $p_1 \circ u_{i_0,\dots,i_{n_1}}$ лежит в ∂X_1, либо сингулярный симплекс $p_2 \circ u_{j_{n_1},\dots,j_{n_1+n_2}}$ лежит в ∂X_2, так что соответствующие коцепи равны нулю; единственное исключение — $i_k = k$ при $k = 0, \dots, n_1$ и $j_{n_1+l} = l$ при $l = 0, \dots, n_2$. В этом случае обе коцепи равны 1. Отсюда вытекает, что $p_1^* a_1 \cup p_2^* a_2$

— коцепь, представляющая образующую в $H^{n_1+n_2}(X_1 \times X_2)$, и операция $\times : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ — умножение целых чисел.

Теорема 1. *Пусть $p_1, p_2 : X \times X \to X$ — проекции квадрата клеточного пространства на первый и второй сомножитель. Тогда для всяких $\alpha \in H^n(X, K)$ и $\beta \in H^m(X, K)$ выполнено равенство $\alpha \times \beta = p_1^* \alpha \cup p_2^* \beta$.*

Следствие 2. *Пусть $\Delta : X \to X \times X$ — диагональное вложение. Тогда $\alpha \cup \beta = \Delta^*(\alpha \times \beta)$.*

Доказательство следствия. $p_1 \circ \Delta = \mathrm{id}_X = p_2 \circ \Delta$. □

Доказательство теоремы. Рассмотрим для каждого n отображеие $\mu_n : \Delta_n \to S^n$, переводящее границу стандартного симплекса в северный полюс, а остальное — гомеоморфно. Очевидно, $\mu_n^* : H^n(S^n, \mathrm{pt}) \to H^n(\Delta_n, \partial \Delta_n)$ — изоморфизм. Отсюда и из примера 1 вытекает, что отображение $\times : H^{n_1}(S^{n_1}, \mathrm{pt}) \times H^{n_2}(S^{n_2}, \mathrm{pt}) \to H^{n_1+n_2}(S^{n_1} \times S^{n_2}, S^{n_1} \vee S^{n_2}) = H^{n_1+n_2}(S^{n_1+n_2}, \mathrm{pt})$ — умножение целых чисел. Поскольку $n_1, n_2 > 0$, относительные когомологии $H^{n_i}(S^{n_i}, \mathrm{pt})$ совпадают с абсолютными, так что отображение $\times : H^{n_1}(S^{n_1}) \times H^{n_2}(S^{n_2}) \to H^{n_1+n_2}(S^{n_1} \times S^{n_2})$ — также умножение целых чисел. Аналогично для букетов сфер: умножение $\times : H^{n_1}(\bigvee_{k=1}^{\ell_1} S^{n_1}) \times H^{n_2}(\bigvee_{k=1}^{\ell_2} S^{n_2}) \to H^{n_1+n_2}((\bigvee_{k=1}^{\ell_1} S^{n_1}) \times (\bigvee_{k=1}^{\ell_2} S^{n_2}))$ — почленное умножение $\mathbb{Z}^{\ell_1} \times \mathbb{Z}^{\ell_2} \to \mathbb{Z}^{\ell_1+\ell_2}$.

Рассмотрим теперь проекции $\nu_1 : \mathrm{sk}_{n_1}(X_1) \to \mathrm{sk}_{n_1}(X_1)/\,\mathrm{sk}_{n_1-1}(X_1) = \bigvee_k S^{n_1}$, где k пробегает множество n_1-мерных клеток; аналогично ν_2. Образующие в $H^{n_1}(\mathrm{sk}_{n_1}(X_1), \mathrm{sk}_{n_1-1}(X_1))$ соответствуют n_1-мерным клеткам в X_1; аналогично для X_2; из теоремы о клеточном вычислении гомологий следует, что ν_1^* и ν_2^* — эпиморфизмы. Следовательно, если $\alpha \in H^{n_1}(\mathrm{sk}_{n_1}(X_1))$ и $\beta \in H^{n_2}(\mathrm{sk}_{n_2}(X_2))$ представляются клеточными коцепями a и b, то $(a \times b)(e_1^{(n_1)} \times e_2^{(n_2)}) = a(e_1^{(n_1)}) b(e_2^{(n_2)})$.

Рассмотрим теперь включения $\iota_1 : \mathrm{sk}_{n_1}(X_1) \to X_1$ и аналогично для X_2. По теореме о клеточных гомологиях ι_1^* и ι_2^* — мономоорфизмы в когомологиях степеней n_1 и n_2 соответственно. Следовательно, $\alpha \times \beta$ в когомологиях $X_1 \times X_2$ вычисляется по той же формуле, что для остовов. □

Пример 2. Рассмотрим отображение $f : (\mathbb{C}P^1)^n \to \mathbb{C}P^n$, переводящее набор $([z_1 : w_1], \dots, [z_n : w_n])$ в набор $[a_0 : \dots : a_n]$ такой, что $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} t + \dots + a_n t^n = (z_1 s + w_1 t) \dots (z_n s + w_n t)$. Очевидно, на $(\mathbb{C}P^1)^n$ действует группа перестановок n сомножителей и прообраз произвольной точки в $\mathbb{C}P^n$ — орбита такого действия. Общая орбита состоит из $n!$ точек, специальные орбиты могут быть меньше.

Как было доказано ранее, $H^*(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{Z}[x]/(x^2 = 0)$, где $x \in H^2(\mathbb{C}P^1)$. Из теоремы 1 вытекает, что $H^*((\mathbb{C}P^1)^n) = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]/(x_1^2 = \dots = x_n^2 = 0)$. Также известно, что $H^k(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$ при k четном от 0 до $2n$; остальные когомологии нулевые. Обозначим y_k образующую $H^k(\mathbb{C}P^n)$.

Очевидно, $f^*(y_k) = k! e_k(x) = k!(x_1 \dots x_i + \dots + x_{n-i+1} \dots x_n)$ (сумма по всем мономам степени k, свободным от квадратов). Тогда $f^*(y_k \cup y_l) = f^*(y_{k+l})$, откуда $y_{k+l} = y_k \cup y_l$, то есть $H^*(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}[y]/(y^{n+1} = 0)$, где $y = y_1 \in H^2(\mathbb{C}P^n)$.