ЛЕКЦИЯ 7–8

Краткое содержание. Лемма Морса и теорема о приклеивании клетки.

Говорят, что на топологическом пространстве M введена структура n-мерного гладкого многообразия, если для каждой точки a имеется окрестность U (*карта*) и отображение $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ (*система координат*) такие, что φ является гомеоморфизмом U и открытого множества $V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, и для любых двух систем координат композиция $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ (*отображение замены координат*) является бесконечно гладким отображением, то есть имеет непрерывные частные производные всех порядков. Также говорят, что на M введена структура многообразия с краем, если для некоторых точек (внутренних) $\varphi(U)$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$, а для некоторых (точек края) — открытым множеством в $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \geq 0\}$.

Если M и N — гладкие многообразия (возможно, разной размерности), то отображение $f : M \to N$ называется гладким, если для произвольной точки $a \in M$ и каких-либо (и, следовательно, любых) систем координат φ, ψ в окрестностях U, V точек a и $f(a) \in N$ отображение $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ является бесконечно гладким. Гладкое отображение $M \to \mathbb{R}$ называется гладкой функцией на M, гладкое отображение $\mathbb{R} \to M$ — гладкой кривой на M. Точка $a \in M$ называется критической точкой функции f, если $(f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(a)) = 0$ для какой-либо (и, следовательно, для любой) системы координат φ в окрестности точки a. Значение функции в критической точке называется критическим значением.

Лемма 1. *Пусть $a \in M$ не является критической точкой гладкой функции $f : M \to \mathbb{R}$. Тогда существует окрестность $U \ni a$ и в ней система координат $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ такие, что $(f \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_n) = f(a) + x_1$.*

Доказательство. Отобразим малую окрестность точки a в открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ с помощью произвольной системы координат. Отсюда немедленно вытекает, что теорему достаточно доказать в случае $M = \mathbb{R}^n$. Для упрощения формул положим $a = 0$.

Для произвольной точки $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено равенство $f(x) = f(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\, dx = f(0) + (v(x), x)$, где скобки означают скалярное произведение, а $v(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 f'(tx)\, dt$ (символом $f'(y)$ мы здесь обозначаем вектор, составленный из частных производных функции f в точке y). Рассмотрим теперь отображение $G : \mathrm{Mat}_n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданное формулой $G(A, x) = A^T v(Ax)$ (здесь первый аргумент — матрица $n \times n$). Отображение G гладкое; если $x = 0$, а $A = I + \Delta$, где Δ мала, то $G(I + \Delta, 0) = v(0) + \Delta^T v(0) = G(I, 0) + \Delta^T v(0)$. Поскольку вектор $v(0) = f'(0) \neq 0$ по условию, отображение $\mathrm{Mat}_n \to \mathbb{R}^n$, переводящее $\Delta \mapsto \Delta^T v(0)$, невырождено (докажите!). Отсюда по теореме о неявной функции получается, что в некоторой окрестности $V \ni 0$ существует гладкое отображение $A : V \to \mathrm{Mat}_n$ такое, что $A(0) = I$ и $G(A(x), x) = G(0)$. Отсюда $f(A(x)x) = f(0) + (v(A(x)), A(x)x = f(0) + (A^T(x) v(A(x)x), x) = f(0) + (v(0), x)$. Осталось только определить в $\mathbb{R}^n$ ортогональный базис, в котором $v(0)$ будет первым базисным вектором. $\square$

Назовем критическую точку a функции $f : M \to \mathbb{R}$ невырожденной (или морсовской), если для какой-нибудь (и, следовательно, для любой) системы координат φ в окрестности $U \ni a$ матрица вторых частных производных функции $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ невырождена.

Лемма 2 (лемма Морса)**.** *Пусть a — невырожденная критическая точка функции f. Тогда существует окрестность $U \ni a$ и система координат φ в ней такие, что $(f \circ \varphi^{-1})(x) = f(a) + \frac{1}{2}(Hx, x)$, где H — невырожденная симметрическая матрица. Индекс инерции квадратичной формы (Hx, x) зависит только от функции f и точки a и не зависит от выбора системы координат (он называется индексом критической точки a).*

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 1, достаточно рассмотреть случай $M = \mathbb{R}^n$ и $a = 0$. Пусть теперь $f'(0) = 0$; тогда (аналогично доказательству леммы 1) $f(x) = f(0) + \int_0^1 (f'(tx), x)\, dt = \int_0^1 \int_0^1 (f''(t\tau x) tx, x)\, d\tau dt = \frac{1}{2}(H(x)x, x)$, где $H(x) = 2 \int_0^1 \int_0^1 t f''(t\tau x)\, d\tau dt$. Здесь $f''(y)$ — матрица вторых производных функции f в точке y; очевидно, $H(0) \stackrel{\text{def}}{=} H$ — матрица вторых производных f в нуле.

Рассмотрим произвольную симметрическую матрицу B такую, что множество собственных значений матрицы $\tilde{H} = BHB$ не содержит взаимно противоположных чисел — нетрудно видеть, что такая матрица существует. Замена переменной $x \mapsto Bx$ в квадратичной форме $\frac{1}{2}(Hx, x)$ эквивалентна замене H на $\tilde{H}$ и, очевидно, не влияет на справедливость леммы. Таким образом, можно просто считать, что матрица вторых производных f в нуле не имеет взаимно противоположных собственных значений (в частности, нуль не является собственным значением, но это следует из невырожденности).

Положим $G(A,x) = AH(Ax)A - H(0)$, где A — симметрическая матрица, а x — вектор. Вычислим производную отображения G по A в точке $(I,0)$: $G(I+\Delta,0) = \Delta H(0) + H(0)\Delta + o(\Delta)$. Поскольку матрица $H(0)$ симметрическая, она диагонализуема; пусть $H(0) = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. Тогда оператор $\Delta \mapsto \Delta H(0) + H(0)\Delta$ переводит произвольную матрицу $\Delta = (u_{ij})$ в $((\lambda_i+\lambda_j)u_{ij})$. Поскольку по условию среди λ_i нет взаимно противоположных значений, $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$, так что оператор невырожденный. Из теоремы о неявной функции следует, что в некоторой окрестности начала координат существует такая функция $A(x)$ со значениями в симметрических матрицах, что $A(0) = I$ и $G(A(x),x) = 0$, то есть $f(A(x)x) = \frac{1}{2}(H(A(x))A(x)x, A(x)x) = \frac{1}{2}(A(x)H(A(x))A(x)x, x) = \frac{1}{2}(H(0)x,x)$ — невырожденная квадратичная форма. □

Замечание 1. Согласно общей теореме о приведении квадратичной формы к сумме квадратов можно выбрать систему координат φ таким образом, чтобы $f(\varphi^{-1})(x_1,\dots,x_n) = f(a) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$, где k — индекс критической точки a.

Замечание 2. Из леммы 2 вытекает, в частности, что невырожденные критические точки функции изолированы. Следовательно, если $f : M \to \mathbb{R}$ — функция Морса и многообразие M компактно, то f имеет конечное число критических точек.

Пусть a — точка многообразия M. Назовем гладкие кривые γ_1, γ_2 эквивалентными в точке a, если $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$ и $\varphi(\gamma_1(t)) - \varphi(\gamma_2(t)) = o(t)$ при $t \to 0$ для некоторой (и, следовательно, любой) системы координат φ в окрестности точки a. По формуле Тейлора последнее равенство означает, что $(\varphi\circ\gamma_1)'(0) = (\varphi\circ\gamma_2)'(0)$ — следовательно, введенное отношение на самом деле есть отношение эквивалентности. Касательным вектором к многообразию M в точке a называется класс эквивалентности гладких кривых по введенному отношению. Векторы в точке a образуют векторное пространство: сумма векторов, представленных кривыми γ_1 и γ_2 это вектор, представленный кривой γ такой, что $(\varphi\circ\gamma)'(0) = (\varphi\circ\gamma_1)'(0) + (\varphi\circ\gamma_2)'(0)$, где φ — произвольная система координат в окрестности точки a; нетрудно видеть, что кривая γ существует и единственна с точностью до эквивалентности. Умножение вектора на число определяется аналогично.

Говорят, что на многообразии M задано векторное поле, если в каждой точке a задан касательный вектор, и этот вектор гладко зависит от точки — последнее означает, что если $\gamma_a : \mathbb{R} \to M$ — гладкая кривая, представляющая вектор в точке $a \in M$, то для некоторой (и, следовательно, всякой) системы координат φ в окрестности a производная $(\varphi\circ\gamma_a)'(0)$ (это отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, то есть n-мерный вектор) зависит от a гладко. Кривая $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ называется интегральной кривой векторного поля X, если для всякого $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ кривая $\gamma_s(t) = \gamma(t+s)$ представляет вектор $X(\gamma(s))$ (значение поля X в точке $\gamma(s)$). Из теоремы существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений вытекает, что для всякого гладкого векторного поля в произвольной точке существует и единственна интегральная кривая. Если многообразие M компактно, то интегральная кривая определена не на интервале $(-\varepsilon,\varepsilon)$, а на всем $\mathbb{R}$ (докажите!).

Пусть X — гладкое векторное поле на M, $f : M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Положим теперь $(Xf)(a) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\big|_{t=0}$, где γ — интегральная кривая поля X, для которой $\gamma(0) = a$. Полученная величиа (производая функции f вдоль векторного поля X), очевидно, зависит линейно и от функции и от векторного поля.

Лемма 3. *Пусть M — многообразие и f — функция Морса на нем. Существует векторное поле X, определенное во всех некритических точках M такое, что $X(f) \equiv -1$.*

Доказательство. Пусть a — некритическая точка функции f. Рассмотрим окрестность $U \ni a$ и систему координат $\varphi(x) = (\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x))$, описанные в лемме 1. Определим в U векторное поле X_U такое, что представителем вектора $X_U(b)$ для произвольной точки $b \in U$ является кривая $\varphi^{-1}(\varphi_1(b)-t, \varphi_2(b),\dots,\varphi_n(b))$.

Поскольку точка a произвольная, окрестности U образуют покрытие многообразия M с выколотыми критическими точками функции f. По теореме о разбиении единицы существует набор гладких функций $\varrho_U : M \to \mathbb{R}$ таких, что $\varrho_U(b) \geq 0$ для всех $b \in M$, $\varrho_U(b) = 0$ для всякого $b \notin U$ и $\sum_U \varrho_U \equiv 1$. Теперь положим $X = \sum_U \varrho_U X_U$. □

Для произвольной функции f на многообразии M множество $L_c(f) = f^{-1}((-\infty,c])$ называется лебеговым множеством. Если c — некритическое значение f, то согласно теореме о неявной функции лебегово множество является многообразием с краем.

Теорема 1. *Пусть f — функция Морса на компактном многообразии M, и пусть отрезок $[c_1,c_2] \subset \mathbb{R}$ не содержит критических значений f. Тогда многообразия с краем $L_{c_1}(f)$ и $L_{c_2}(f)$ диффеоморфны, и $L_{c_1}(f) \subset L_{c_2}(f)$ является деформационным ретрактом $L_{c_2}(f)$.*

Доказательство. Поскольку M компактно, множество критических значений функции f конечно; зафиксируем $\varepsilon > 0$ такое, что отрезок $[c_1-\varepsilon, c_2]$ не содержит критических значений. Рассмотрим теперь гладкую функцию μ одной переменной со следующими свойствами: $\mu(c_2) = c_2 - c_1$, $\mu(t) = 0$ при $t \leq c_1 - \varepsilon$, $\mu(t)$ строго возрастает при $c_1 - \varepsilon \leq t \leq c_2$.

Множество $f^{-1}([c_1-\varepsilon, c_2])$ не содержит критических точек; зададим на нем векторное поле X как в лемме 3. Пусть $\gamma_a : \mathbb{R} \to M$ — интегральная кривая поля X такая, что $\gamma_a(0) = a$; по условию, $f(\gamma_a(t)) = f(a) - t$. Положим теперь $S(a) = \gamma_a(\mu(f(a)))$, если $f(a) \in [c_1 - \varepsilon, c_2]$, и $S(a) = a$ для остальных точек. Нетрудно видеть, что преобразование $S : M \to M$ — диффеоморфизм, переводящий $L_{c_2}(f)$ в $L_{c_1}(f)$. Деформационная ретракция строится аналогично (постройте!). □

Теорема 2. *Пусть M — компактное многообразие, $f : M \to \mathbb{R}$ — функция Морса, a — критическая точка, $f(a) = c$, и $\varepsilon > 0$ таково, что $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ не содержит критических точек f, кроме a. Пусть k — индекс критической точки a. Тогда $L_{c+\varepsilon}$ гомотопически эквивалентно $L_{c-\varepsilon}$ с приклеенной k-мерной клеткой.*

Доказательство. Введем в окрестности $U \ni a$ систему координат $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ как в замечании 1 к лемме 2. Положим для удобства $\varphi(a) = 0$ и пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что $\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \le 2\varepsilon\} \subset \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Определим функцию $F : M \to \mathbb{R}$ равенством $F(b) = f(b) - \mu(\varphi_1^2(b) + \dots + \varphi_k^2(b) + 2\varphi_{k+1}^2(b) + \dots + 2\varphi_n^2(b))$ для тех точек b, для которых аргумент функции μ не превосходит 2ε (обозначим V множество таких b); для остальных b положим $F(b) = f(b)$. Здесь μ — гладкая функция одной переменной, удовлетворяющая условиям $\mu(0) > \varepsilon$, $\mu(t) = 0$ при $t \ge 2\varepsilon$ и $-1 < \mu'(t) < 0$ при $0 < t < 2\varepsilon$. Тогда если $b \in V$ имеем $F(b) \le f(b) \le c + \varepsilon$; если $b \notin V$, то $F(b) = f(b)$; отсюда вытекает, что $L_{c+\varepsilon}(F) \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}((-\infty, c+\varepsilon]) = f^{-1}((-\infty, c+\varepsilon]) = L_{c+\varepsilon}(f)$.

Пусть $G(x) = F \circ \varphi^{-1}(x) = c - \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{i=k+1}^n x_i^2 - \mu(\sum_{i=1}^k x_i^2 + 2\sum_{i=k+1}^n x_i^2)$ при $\varphi(x) \in V$. Тогда $\frac{\partial G}{\partial x_i} = -2x_i(1 + \mu'(x))$ при $i \le k$ и $\frac{\partial G}{\partial x_i} = 2x_i(1 - 2\mu'(x))$ при $i \ge k+1$. Отсюда вытекает, что F не имеет критических точек в V, кроме $a = \varphi^{-1}(0)$, и тем самым критические точки функций F и f совпадают. Поскольку $F(b) \le f(b)$, имеем $F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \subset f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$. Кроме того, $F(a) < c - \varepsilon$, так что $a \notin F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$. Следовательно, отрезок $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ не содержит критических значений функции F и, согласно теореме 2, $L_{c-\varepsilon}(F)$ диффеоморфно $L_{c+\varepsilon}(F) = L_{c+\varepsilon}(f)$.

Пусть W — замыкание $L_{c-\varepsilon}(F) \setminus L_{c-\varepsilon}(f)$, так что $L_{c-\varepsilon}(F) = L_{c-\varepsilon}(f) \cup W$. Обозначим $e = \{b \mid \varphi_1(b)^2 + \dots + \varphi_k(b)^2 \le \varepsilon, \varphi_{k+1}(b) = \dots = \varphi_n(b) = 0\}$. Очевидно, e гомеоморфно k-мерному шару; как нетрудно заметить, $e \subset W$. Докажем, что $L_{c-\varepsilon}(f) \cup e$ — ретракт $L_{c-\varepsilon}(F) = L_{c-\varepsilon}(f) \cup W$, причем ретракцию можно сделать неподвижной на $L_{c-\varepsilon}(f)$; очевидно, это докажет теорему. Ретрацию при $\varphi_1^2(b) + \dots + \varphi_k^2(b) \le \varepsilon$ определим формулой $\Lambda_t(b) = \varphi^{-1}(\varphi_1(b), \dots, \varphi_k(b), t\varphi_{k+1}(b), \dots, t\varphi_n(b))$, а при $\varepsilon \le \varphi_1^2(b) + \dots + \varphi_k^2(b) \le \varphi_{k+1}^2(b) + \dots + \varphi_n^2(b) + \varepsilon$ (т.е. для всех остальных точек, не принадлежащих $L_{c-\varepsilon}(f) = \{b \mid \varphi_1^2(b) + \dots + \varphi_k^2(b) \ge \varphi_{k+1}(b) + \dots + \varphi_n(b) + \varepsilon\}$) — формулой $\Lambda_t(b) = \varphi^{-1}(\varphi_1(b), \dots, \varphi_k(b), \tau(t,b)\varphi_{k+1}(b), \dots, \tau(t,b)\varphi_n(b))$, где $\tau(t,b) = t + (1-t)\sqrt{(\varphi_1^2(b) + \dots + \varphi_k^2(b) - \varepsilon)/(\varphi_{k+1}^2(b) + \dots + \varphi_n^2(b))}$. Легко проверить, что отображение Λ непрерывно и действительно является ретракцией. □

Следствие 1. *Пусть M — компактное многообразие, $f : M \to \mathbb{R}$ — функция Морса, имеющая N критических точек индексов $i_1, \dots, i_N$. Тогда M гомотопически эквивалентно клеточному комплексу, состоящему из клеток размерностей $i_1, \dots, i_N$.*

Для доказательства нужно показать, что если пространство X гомотопически эквивалентно Y, то пространство X с приклеенной клеткой гомотопически эквивалентно X с приклеенной клеткой той же размерности. Доказательство этого факта — упражнение.