

## 3. КЛЕТОЧНЫЙ КОМПЛЕКС

Напомним, что клеточное пространство это хаусдорфово топологическое пространство  $X$ , разбитое в объединение непересекающихся множеств (клеток)  $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigsqcup_{\alpha \in I_k} e_{\alpha}^k$  таких, что:

- (C) для каждой клетки  $e_{\alpha}^k$  существует *характеристическое отображение* — непрерывное отображение замкнутого  $k$ -мерного шара  $\chi_{\alpha}^k : D^k \rightarrow X$  такое, что  $\chi_{\alpha}^k|_{\text{Int}(D^k)}$  — гомеоморфизм на  $e_{\alpha}^k$ , а  $\chi_{\alpha}^k(\partial D^k)$  содержится в объединении конечного множества клеток  $e_{\beta}^i$  с  $i < k$ .
- (W) множество  $F \subset X$  замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто его пересечение с замыканием любой клетки.

$\text{sk}_n X$  обозначает объединение всех клеток размерности не выше  $n$ .

Пусть  $e_{\alpha}^k$  —  $k$ -мерная клетка, а  $e_{\beta}^{k-1}$  содержится в образе отображения  $f_{\alpha}^k \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{\alpha}^k|_{\partial D^k} : S^{k-1} \rightarrow \text{sk}_{k-1} X$ . Рассмотрим отображение  $\pi_{\beta} : \text{sk}_{k-1}(X) \rightarrow S^{k-1}$ , получающееся стягиванием в точку всех клеток  $\text{sk}_{k-1}(X)$  (всех размерностей), кроме самой  $e_{\beta}^{k-1}$ . Степень  $[e_{\alpha}^k : e_{\beta}^{k-1}]$  отображения  $\pi_{\beta}^{k-1} \circ f_{\alpha}^k : S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$  называется *коэффициентом инцидентности* клеток  $e_{\alpha}^k$  и  $e_{\beta}^{k-1}$ .

Клеточный комплекс клеточного пространства имеет вид  $\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$ , где  $C_k$  —  $K$ -модуль, свободно порожденный множеством  $k$ -мерных клеток, а дифференциал  $\partial_k$  задается формулой  $\partial_k(e_{\alpha}^k) = \sum_{\beta} [e_{\alpha}^k : e_{\beta}^{k-1}] e_{\beta}^{k-1}$ . Гомологии клеточного комплекса равны сингулярным гомологиям пространства.

В следующей задаче нужно построить клеточное разбиение пространства  $X$ , вычислить коэффициенты инцидентности клеток и гомологии с коэффициентами в  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Если даны два пространства  $X$  и  $Y$  и отображение  $f : X \rightarrow Y$ , то нужно еще вычислить гомоморфизм  $f_* : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$  при всех  $k$ .

**Задача 1.** а)  $X$  — сфера с  $g$  ручками; б)  $X$  — бутылка Клейна с  $g$  ручками; в)  $X$  — проективная плоскость с  $g$  ручками; г)  $X$  — сфера с  $g$  ручками и  $n$  дырками;  $Y$  — сфера с  $g$  ручками,  $f : X \rightarrow Y$  — вложение. д)  $X = S^n$ ,  $Y = \mathbb{R}P^n$ ,  $f : X \rightarrow Y$  — стандартное двулистное накрытие. е)  $X = S^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$ ,  $Y = \mathbb{C}P^n$ ,  $f : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  — обобщенное расслоение Хопфа ( $f(z_0, \dots, z_n) = [z_0 : \dots : z_n]$ ). ж)  $X = S^{2n+1}$  как в пункте ??; на  $X$  действует группа  $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} = \{\zeta^m \stackrel{\text{def}}{=} e^{2\pi im/k} \mid m = 0, \dots, k-1\}$  преобразованиями  $\zeta^m(z_0, \dots, z_n) = (\zeta^m z_0, \dots, \zeta^m z_n)$ ;  $Y$  — пространство орбит этого действия,  $f : X \rightarrow Y$  — отображение, переводящее произвольную точку в ее орбиту. з)  $X = S^{\infty}$  — множество бесконечных последовательностей  $(x_1, \dots, x_n, \dots)$ , члены которых равны нулю, начиная с некоторого номера (своего для каждой последовательности), и  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = 1$ .  $Y = \mathbb{C}P^{\infty}$  (дайте определение!),  $f : S^{\infty} \rightarrow \mathbb{C}P^{\infty}$  — аналог расслоения Хопфа. и)  $Y = G(2, 4, \mathbb{R})$  (множество двумерных подпространств в  $\mathbb{R}^4$ ),  $X = G_+(2, 4, \mathbb{R})$  (множество ориентированных двумерных подпространств в  $\mathbb{R}^4$ ),  $f : X \rightarrow Y$  — забывание ориентации.