4. ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА. УМНОЖЕНИЕ.

Задача 1 (эйлерова характеристика)**.** Пусть $0 \to V_n \to V_{n-1} \to \dots \to V_0 \to 0$ — конечный комплекс конечномерных векторных пространств (над любым полем). Докажите, что $\sum_i (-1)^i \dim V_i = \sum_i \dim H_i(V)$.

Задача 2 (формула Кюннета)**.** Пусть $X. = \dots \to X_n \xrightarrow{\partial n, X} X_{n-1} \xrightarrow{\partial n-1, X} \dots$ и $Y. = \dots \to Y_n \xrightarrow{\partial n, Y} Y_{n-1} \xrightarrow{\partial n-1, Y} \dots$ — комплексы свободных модулей над кольцом K, и $X. \otimes Y. = \dots \to X_n \otimes Y_n \xrightarrow{\partial n, X \otimes \partial n, Y} X_{n-1} \otimes Y_{n-1} \xrightarrow{\partial n-1, X \otimes \partial n-1, Y} \dots$ — их тензорное произведение. а) Докажите, что если K — поле, то $H_*(X \otimes Y, K) = H_*(X, K) \otimes H_*(Y, K)$ (т.е. $H_n(X \otimes Y, K) = \sum_{k=0}^n H_k(X, K) \otimes H_{n-k}(Y, K)$). б) Докажите, что $H_*(X \otimes Y, \mathbb{Z}) = H_*(X, \mathbb{Z}) \otimes H_*(Y, \mathbb{Z}) \oplus G$ для некоторого $\mathbb{Z}$-модуля (т.е. абелевой группы) G, который зависит только от $H_*(X, \mathbb{Z})$ и $H_*(Y, \mathbb{Z})$. Приведите пример, когда модуль G нетривиален.

Замечание. Задача 2 важна, потому что если P и Q — клеточные пространства, то клеточный комплекс $P \times Q$ — тензорное произведение клеточных комплексов P и Q.

Задача 3. Пусть $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$, где A — конечное множество. Рассмотрим топологическое пространство X, точками которого будут все пары (a, k) такие, что $a \in A_k$. Имеется естественное отображение $p : X \to A$; для каждой точки $a \in A$ натянем симплекс на все точки $u \in p^{-1}(a)$. Полученное топологическое пространство (нерв покрытия $A_1, \dots, A_n$) обозначим N. Докажите, что N гомотопически эквивалентно A с дискретной топологией. Что дает равенство задачи 1 в применении к N?

Задача 4 (нетопологический пример)**.** Для фиксированного n и произвольного k пусть P_k — векторное пространство, базис в котором нумеруется разбиениями $n = l_1 + \dots + l_k$, $l_1 > l_2 > \dots > l_k$ (т.е. диаграммами Юнга из k различных строк и n клеток). Оператор $d_k : P_k \to P_{k+1}$ сопоставляет разбиению (т.е. базисному элементу) $l_1, \dots, l_k$ разбиение (т.е. базисный элемент) $l_1 - 1, l_2 - 1, \dots, l_s - 1, l_{s+1}, \dots, l_k, s$, где s — наибольшее число такое, что $l_s = l_1 - s + 1$, и при этом $s < l_k$. Если $s \ge l_k$, то оператор d_k переводит соответствующий базисный элемент в нуль. а) Вычислите производящую функцию $P(t) = \sum_k t^k \dim P_k$. б) Докажите, что пространства P_k и операторы d_k образуют комплекс, т.е. $d_{k+1} \circ d_k = 0$. в) Вычислите когомологии этого комплекса. Что дает применение тождества задачи 1 к этому комплексу?

Задача 5. Пусть $p : E \to B$ — локально тривиальное расслоение с компактной клеточной базой и компактным клеточным слоем F. Докажите, что $\chi(E) = \chi(B)\chi(F)$, где χ — эйлерова характеристика клеточного комплекса.

Задача 6. Пусть $R = P \cup Q$, где R — компактное клеточное пространство, P и Q — клеточные подпространства, и $P \cap Q$ тоже клеточное подпространство. Докажите равенство $\chi(R) = \chi(P) + \chi(Q) - \chi(P \cap Q)$.

Задача 7. Вычислите эйлерову характеристику сферы с g ручками и n выколотыми точками, проективной плоскости с g ручками и n выколотыми точками, и бутылки Клейна с g ручками и n выколотыми точками

Задача 8 (для знакомых с основами комплексного анализа)**.** Пусть A, B — компактные комплексные кривые, и $f : A \to B$ — разветвленное накрытие, т.е. голоморфное отображение, которое в подходящей координате z вблизи произвольной точки $a \in A$ и подходящей координате w вблизи точки $f(a) \in B$ выглядит как $w = z^k$ для некоторого $k > 0$ (зависящего от точки). Число k называется индексом разветвления в точке a и обозначается $\varepsilon(a)$. а) Докажите, что $\varepsilon(a) > 1$ только для конечного количества точек, и что существует такое число N, что если $\varepsilon(a) = 1$ для всякого $a \in f^{-1}(b)$, то множество $f^{-1}(b)$ состоит из N точек. б) Докажите формулу Римана–Гурвица: $\chi(A) = N\chi(B) - \sum_a (\varepsilon(a) - 1)$, где суммирование ведется по всем точкам, для которых $\varepsilon(a) > 1$.

Задача 9. а) Пусть $\Delta : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ — диагональное вложение. Постройте клеточное отображение, гомотопное Δ, где клеточная структура в $\mathbb{R}P^2$ стандартная (по одной клетке размерностей 0, 1 и 2), а в $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$ — прямое произведение двух стандартных. б) Вычислите структуру кольца в $H^*(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Задача 10. Пусть X_n — факторпространство произведения $S^n \times S^n$ по отождествлению $(x_0, x) \sim (x, x_0)$, в котором $x_0 \in S^n$ — отмеченная точка, а x пробегает всю сферу S^n. а) Постройте клеточное разбиение X_n и вычислите когомологии $H^k(X, \mathbb{Z})$ для всех k. б) Вычислите когомологический гомоморфизм f^*, где $f : S^n \times S^n \to X_n$ — естественная проекция. в) Вычислите структуру кольца в $H^*(X_n, \mathbb{Z})$.

Указание (к пункту 10в)**.** Вычислите сначала структуру кольца на $H^*(S^n \times S^n)$.