5. ТЕОРИЯ МОРСА.

Задача 1. а) Пусть $p_0, \dots, p_n$ — попарно различные положительные действительные числа. Найдите критические точки функции $f : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}$, заданной в однородных координатах $x = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ формулой $f(x) = \frac{\sum_{i=0}^n p_i x_i^2}{\sum_{i=0}^n x_i^2}$. Найдите индексы всех критических точек. б) Опишите многообразие $f^{-1}(c)$ для всех некритических значений c. в) Постройте клеточное разбиение $f^{-1}(c)$ для критических значений c.

Задача 2. Постройте на $\mathbb{C}P^2$ функцию Морса с тремя критическими точками.

Задача 3. Остров в океане имеет форму кольца. Докажите, что на нем есть хотя бы одна вершина и по крайней мере один перевал (рельеф считаем морсовским).

Задача 4. Шарнирный механизм состоит из 3 стержней A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 длиной ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Шарнир A_1 закреплен в начале координат, шарнир A_4 может двигаться по оси абсцисс, а остальные шарниры свободно двигаются по плоскости так, что длина стержней не меняется. а) При каких $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ множество $X(\ell)$ положений шарнира с естественной топологией (какой именно?) обладает структурой гладкого двумерного многообразия? б) Найдите критические точки функции $f : X(\ell) \to \mathbb{R}$, заданной равенством $f(A_1, \dots, A_4) = |A_1A_4|^2$. Найдите индексы критических точек. в) Опишите многообразие $f^{-1}(c)$ для всех некритических значений c. г) Постройте клеточное разбиение $f^{-1}(c)$ для критических значений c.

Задача 5. Задача, аналогичная 4а–4г, но шарнирный механизм состоит из четырех стержней A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 одинаковой длины (в пункте а) многообразие трехмерное).

Следующая задача иллюстрирует трудности при построении теории Морса на некомпактных многообразиях.

Задача 6. Существует ли на $\mathbb{R}^2$ морсовская функция, а) имеющая две точки максимума и ни одной точки минимума? б) имеющая две точки максимума и более не имеющая ни одной критической точки? в) имеющая единственную критическую точку, являющуюся точкой локального минимума, но при этом неограниченная снизу?

Ответ. во всех пунктах этой задачи — положительный!

Пусть V — n-мерное ориентируемое многообразие, и $f : V \to \mathbb{R}^{n+1}$ — *погружение*, т.е., гладкое отображение такое, что его производная — линейное отображение $f'(x) : T_xV \to \mathbb{R}^{n+1}$ имеет ранг n в каждой точке $x \in V$. *Гауссово отображение* $G_f : V \to S^n$ сопоставляет точке $x \in V$ единичный вектор нормали к образу $f'(x)$ (это гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$). Выбор одной нормали из двух возможных определяется ориентацией V и $\mathbb{R}^{n+1}$ — уточните! Зафиксируем вектор единичной длины $e \in \mathbb{R}^{n+1}$ и обозначим $h_e(x) = (e, f(x))$, $x \in V$.

Задача 7. а) Докажите, что x — критическая точка h_e тогда и только тогда, когда $G_f(x) = \pm e$. б) Докажите, что x — вырожденная критическая точка h_e тогда и только тогда, когда $G_f(x) = \pm e$ и x — критическая точка G_f. Тем самым h_e — функция Морса тогда и только тогда, когда $\pm e$ не являются критическими значениями G_f. в) Пусть $h_e : V \to \mathbb{R}$ — функция Морса и x — ее критическая точка индекса k, причем $G_f(x) = e$. Докажите, что знак прообраза x точки $G_f(x) = e$ (то есть знак определителя производной $G'_f(x) : T_xV \to T_eS^n$) равен $(-1)^{n-k}$. Как нужно изменить эту формулу, если $G_f(x) = -e$?

Задача 8. а) Используя результат задачи 7в, докажите формулу Хопфа: если n четно, то $2 \deg G_f = \chi(V)$. б) Докажите, что если k четно, то не существует погружения $\mathbb{C}P^k \to \mathbb{R}^{2k+1}$.