6. УМНОЖЕНИЕ В КОГОМОЛОГИЯХ.

Задача 1. Вычислите кольцо когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ а) сферы с g ручками; б) бутылки Клейна с g ручками; в) пространства единичных касательных векторов к сфере с g ручками; г) $\mathbb{C}G(2,4)$; д) $\mathrm{U}(2)$.

Задача 2. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to [0,1]^2$ — непрерывные кривые, причем $\gamma_1(0) = (0,0)$, $\gamma_1(1) = (1,1)$, $\gamma_2(0) = (0,1)$, $\gamma_2(0) = (1,0)$. Докажите, что кривые пересекаются.

Задача 3. Пусть $f : S^n \to \mathbb{R}$ — гладкая нечетная функция, для которой 0 — регулярное значение. Пусть $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ — стандартное двулистное накрытие. Докажите, что $M \stackrel{\text{def}}{=} p(f^{-1}(0)) \subset \mathbb{R}P^n$ — гладкое подмногообразие размерности $n-1$ и класс $[M]_2 \in H_{n-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ отличен от нуля.

Задача 4. а) (теорема Улама–Борсука) Пусть $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное нечетное отображение. Докажите, что существует точка $x \in S^n$ такая, что $f(x) = 0$. б) Докажите, что не существует подмножества $A \subset \mathbb{R}^n$, гомеоморфного S^n. Отсюда следует, что $\mathbb{R}^n$ при разных n не гомеоморфны. в) (теорема Люстерника–Шнирельмана) Пусть $S^n = A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}$, где все A_i — открытые множества. Докажите, что по крайней мере одно из множеств A_i содержит пару диаметрально противоположных точек. г) Докажите, что степень нечетного отображения $f : S^n \to S^n$ нечетна. д) Докажите, что всякое отображение $f : S^n \to S^n$ степени, отличной от $(-1)^{n+1}$, имеет неподвижную точку.

Категория Люстерника–Шнирельмана $\operatorname{cat} M$ многообразия M это минимальное число k такое, что M можно представить в виде объединения k подмножеств, каждое из которых стягиваемо по M в точку.

Задача 5. Докажите, что если на компактном многообразии M существует гладкая функция с k критическими точками, то $\operatorname{cat} M \le k$.

Задача 6. а) Докажите, что $\operatorname{cat}(\mathbb{T}^n) = n+1$. б) Докажите, что $\operatorname{cat}(\mathbb{R}P^n) = n+1$.

Указание (к пункту 6а)**.** Рассмотрите n нестягиваемых циклов — образующих группы $H_{n-1}(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^n$. Никакой из них не может быть покрыт множеством, стягиваемым по $\mathbb{T}^n$ в точку. То же самое относится к их пересечениям.

Задача 7. Докажите, что не существует гомеоморфизма $f : \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$, обращающего ориентацию.

Указание. Рассмотрите умножение $\cup : H^2(\mathbb{C}P^2) \otimes H^2(\mathbb{C}P^2) \to H^4(\mathbb{C}P^2)$.