ПРОГРАММА ЗАЧЕТА

На зачете нужно ответить на один из основных вопросов по выбору преподавателя или на один супервопрос по собственному выбору. Если не сданы соответствующие задачи из листков, то еще нужно ответить на вопрос из гомологической алгебры. Кроме того, необходимо решить несколько задач из листков или аналогичных.

Вопрос из программы содержит название или формулировку утверждения, которое нужно уметь доказывать. Предполагается, что необходимые определения и вспомогательные утверждения студент сформулирует самостоятельно.

1. Вопросы из гомологической алгебры

1. Теорема Бокштейна (короткая точная последовательность комплексов порождает длинную точную последовательность гомологий).
2. 5-лемма.
3. Эйлерова характеристика равна знакопеременной сумме чисел Бетти.

2. Супервопросы из гомологической алгебры

1. Формула универсальных коэффициентов.
2. Формула Кюннета.

Обе формулы доказаны в книге Фукса и Фоменко, §15. Там предполагается, что комплексы это сингулярные комплексы топологических пространств, но от этого предположения легко избавиться. Или см. произвольную книжку по гомологической алгебре.

3. Основные вопросы

1. $\partial^2 = 0$ в сингулярном комплексе.
2. Гомологии являются функтором из гомотопической категории в категорию градуированных модулей. Аналогичная теорема для относительных гомологий.
3. Гомологии, подчиненные покрытию, изоморфны сингулярным. Определение последовательности Майера–Виеториса.
4. Действие отображения букетов сфер одной размерности на гомологии.
5. Относительные гомологии клеточной пары равны приведенным гомологиям фактора.
6. Дифференциал в клеточном комплексе совпадает с отображением из точной последовательности тройки, состоящей из трех последовательных остовов.
7. Гомологии клеточного комплекса равны гомологиям сингулярного комплекса.
8. Теорема Гуревича.
9. Препятствующая коцепь является коциклом.
10. Если два отображения совпадают на $(n-2)$-ом остове, их n-ые препятствующие коциклы отличаются на кограницу.
11. Теорема Хопфа (старшие когомологии пространства X это классы гомотопии отображений X в сферу). Теорема Брушлинского (аналогичное утверждение для первых когомологий).
12. Связь умножения в когомологиях с операцией $\times$ на клеточных комплексах.
13. Нормальная форма гладкой функции в окрестности некритической и невырожденной (морсовской) критической точки.
14. Теорема о приклеивании клетки (гомотопическая). Компактное многообразие гомотопически эквивалентно клеточному комплексу.
15. Гомологии сингулярного комплекса равны гомологиям комплекса, порожденного гладкими сингулярными симплексами, трансверсальными к заданному подмногообразию. (Теорему Тома о трансверсальности доказывать не нужно.)
16. Индекс пересечения с границей равен нулю.
17. Индекс пересечения определяет изоморфизм $H_k(M) \to H^{n-k}(M)$. Вариант этого утверждения для многообразий с краем.
18. Умножение циклов, двойственных по Пуанкаре к трансверсально пересекающимся подмногообразиям.
19. Изоморфизм Тома.

20. Класс Эйлера двойствен по Пуанкаре к множеству нулей сечения. Класс Эйлера прямой суммы. Класс Эйлера касательного расслоения.
21. Индекс формы пересечений в серединных гомологиях края равен нулю.
22. Многообразие $\mathbb{R}P^n$ при $n \neq 2^k - 1$ не являются краем компактного многообразия.

4. Супервопросы

1. Всякое многообразие гомеоморфно клеточному комплексу ("разложение на ручки" — Милнор, "Теория Морса", §2 приложения).
2. Класс Черна $c_k(\eta)$ комплексного векторного расслоения η есть препятствие к построению сечения в расслоении k-реперов в слоях η, двойствен по Пуанкаре к множеству, где k сечений общего положения линейно зависимы, и получается как прообраз определенного класса когомологий грассманиана при характеристическом отображнии. (Милнор, Сташефф, "Характеристические классы", §14 и Фукс, Фоменко, §19. Теорема о том, что каждое векторное расслоение получается индуцированием с тавтологического расслоения на грассманиане, доказывалась в прошлом семестре.)
3. Выражение сигнатуры формы пересечений через классы Понтрягина. Пример Морса многообразия, гомеоморфного, но не диффеоморфного S^7. (Выражение сигнатуры — Фукс, Фоменко, §19; там только для размерностей 4 и 8, но этого достаточно. Пример Милнора — Milnor, "On manifolds homeomorphic to a 7-sphere", Annals of Math., Vol. 56, No. 2, 1956; в сети есть.)
4. Теорема Тома о трансверсальности. (Громов, "Дифференциальные соотношения с частными производными"; или http://ium.mccme.ru/ancient/mapsf96.html , лекции 2, 3 и 4.1).

5. Литература

Большая часть материала покрывается книгой Фукса и Фоменко "Курс гомотопической топологии". Про теорию Морса и двойственность Пуанкаре см. Милнор, "Теория Морса" (в книге Фукса и Фоменко теории Морса нет, а про двойственность — другой подход, с триангуляциями). Про класс Эйлера, классы Штифеля–Уитни и т.п. — Милнор и Сташефф, "Характеристические классы", есть материал и в книге Фукса и Фоменко, но больше в виде упражнений.