

**НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия.  
Экзамен. 7.05.2012.**

*Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо не позднее, чем 19:00 21 мая, отдать мне или положить в учебной части в почтовую ячейку с моим именем (А. Пенской) или оставить на вахте внизу в конверте с моим именем.*

*Убедительная просьба решать самостоятельно и не откладывать на последний день.*

*Для того, чтобы экзамен был засчитан, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее половины задач, то есть 5 задач. Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно».*

**Задача 1.** Рассмотрим неособую плоскую кривую  $\gamma(t)$ . Предположим, что точки  $\gamma(t)$ ,  $\gamma(t+\varepsilon)$  и  $\gamma(t-\varepsilon)$  находятся в общем положении. Обозначим радиус проведённой через эти три точки окружности через  $R(t, \varepsilon)$ . Найти  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(t, \varepsilon)$ . (5 баллов).

**Задача 2.** Поверхность называется *линейчатой*, если она параметрически задается в виде  $\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}(u)$ . Докажите, что на линейчатой поверхности гауссова кривизна всюду неположительна (5 баллов).

**Задача 3.** Из аналитической геометрии вы знаете примеры поверхностей, на которых есть два различных семейства прямолинейных образующих. Докажите, что если на гладкой двумерной поверхности в трехмерном пространстве есть три различных семейства прямолинейных образующих, то эта поверхность является куском плоскости (10 баллов).

**Задача 4.** Доказать, что в любой точке  $p$  группы Ли  $G$  с биинвариантной метрикой секционная кривизна в направлении любой 2-плоскости в  $T_p G$  неотрицательна (10 баллов).

**Задача 5.** Пусть  $[z_0 : \dots : z_n]$  однородные координаты в  $\mathbb{R}P^n$ . Напомним, что отображение Веронезе степени  $d$  — это отображение  $\nu_d : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^N$ , заданное формулой

$$\nu_d([z_0 : \dots : z_n]) = [\dots : z^I : \dots], \quad (1)$$

где  $z^I$  это некоторый моном степени  $d$  от  $z_0, \dots, z_n$ , а в правой части (1) стоят все мономы степени  $d$ . Например, при  $n = 2$  и  $d = 2$  получаем отображение  $\mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^5$ , заданное формулой

$$\nu_2([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^2 : z_1^2 : z_2^2 : z_0 z_1 : z_0 z_2 : z_1 z_2].$$

Найдите обратный образ  $\nu_d^* \gamma^1$  универсального расслоения при этом отображении. (10 баллов).

**Задача 6.** Подмногообразие  $M$  риманова многообразия  $N$  с индуцированной метрикой называется вполне геодезическим, если все геодезические  $M$  являются в то же время и геодезическими  $N$ . Доказать, что  $M$  вполне геодезическое тогда и только тогда, когда вторая квадратичная форма нулевая. (5 баллов).

**Задача 7.** Найдите  $\text{ch}(\xi_k)$ , где  $\xi_k$  есть тривиальное расслоение ранга  $k$  (5 баллов).

**Задача 8\*.** Найти число Понтрягина

$$\langle p_1(r\gamma_{\mathbb{H}}^1), [\mathbb{S}^4] \rangle = \oint_{\mathbb{S}^4} p_1(r\gamma_{\mathbb{H}}^1),$$

где  $\gamma_{\mathbb{H}}^1 = (E \rightarrow \mathbb{H}P^1 \simeq S^4)$  — универсальное расслоение над кватернионной проективной прямой, а  $r$  операция оветствления (не забывайте о некоммутативности кватернионов!) (25 баллов).