НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 1.
Кривые в плоскости и пространстве. 13.02.2012.

Задача 1. Доказать, что кривизна плоской кривой

$$\mathbf{r}(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2,$$

где t — произвольный параметр, может быть найдена по формулам

$$k = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

и

$$k = \frac{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}, \tag{1}$$

где $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ обозначает векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Задача 2. Доказать, что кривизна пространственной кривой

$$\mathbf{r}(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3,$$

где t — произвольный параметр, может быть найдена по формуле (1), а кручение — по формуле $\varkappa = \dfrac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|^2}$, где $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ обозначает смешанное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, то есть ориентированный объём параллелепипеда, порождённого этими векторами.

Задача 3. Найти кривизну и кручение кривой $\mathbf{r}(t) = e^t(\sin t, \cos t, 1)$.

Задача 4. Доказать, что если кривизна кривой тождественно равна нулю, то это прямая. Доказать, что если кручение кривой тождественно равно нулю, то эта кривая лежит в плоскости.

Задача 5. Пусть три точки на кривой лежат в общем положении, то есть не на одной прямой. Тогда через них можно провести единственную окружность. Устремим все три точки теперь к какой-то одной точке P на данной кривой. Найти радиус предельной окружности.

Задача 6*. Доказать, что если кривая с $k \neq 0$, $\varkappa \neq 0$ лежит на сфере радиуса R, то

$$R^2 = \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{(k')^2}{(\varkappa k)^2}\right), \tag{2}$$

где $'$ обозначает производную по отношению к натуральному параметру. Доказать, что если ещё и $k' \neq 0$, то и обратное верно: из тождества (2) следует, что кривая лежит на некоторой сфере радиуса R.

Задача 7. Доказать, что кривая постоянной кривизны, лежащая на сфере, является окружностью.

Задача 8. Описать кривые с постоянными кривизной и кручением (то есть найти кривые, заданные натуральными уравнениями $k(s) = k_0$, $\varkappa(s) = \varkappa_0$, где k_0 и $\varkappa_0$ некоторые константы).

Задача 9*. Доказать, что выпуклая замкнутая гладкая плоская кривая имеет не менее 4 точек экстремума кривизны.

Задача 10. Доказать, что для замкнутой гладкой кривой

$$\int\limits_{\gamma} (\mathbf{r}\, dk + \varkappa \mathbf{b}\, ds) = 0,$$

где s — натуральный параметр.