

**НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 10.**  
**Характеристические классы. 23.04.2012.**

**Задача 1.** Пусть  $\eta$  вещественное расслоение,  $\mathbb{C} \otimes \eta$  его комплексификация. Докажите, что  $c_{2k+1}(\mathbb{C} \otimes \eta) = 0$ ,  $c_{2k}(\mathbb{C} \otimes \eta) = (-1)^k p_k(\eta)$ .

*Указание.* Посмотрите на полный класс Чженя и воспользуйтесь образующими  $U$ .

**Задача 2.** Пусть ранг комплексного векторного расслоения  $\xi$  равен  $k$ . Выразите  $c_1(\det \xi) = c_1(\Lambda^k \xi)$  через классы Чженя расслоения  $\xi$ .

**Задача 3.** Пусть  $\xi$  комплексное расслоение,  $r\xi$  его оветествление.

- Выразите  $p_k(r\xi)$  через классы Чженя расслоения  $\xi$ .
- Докажите, что  $\chi(r\xi) = c_n(\xi)$ .

*Указание.* Посмотрите на полный класс Понтрягина и воспользуйтесь образующими  $U$ .

**Задача 4.** Для ориентированной поверхности в евклидовом пространстве  $M^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  выразить классы Эйлера и Понтрягина через первую и вторую квадратичные формы.

*Указание.* Не забывайте про формулу Уитни для классов Понтрягина!

**Задача 5.** Докажите, что если у комплексного расслоения  $\xi$  есть  $k$  не обращающихся в ноль и независимых в каждой точке сечений, то  $c_n(\xi) = 0$ ,  $\dots$ ,  $c_{n-k+1}(\xi) = 0$ .

**Задача 6.** На лекции при построении класса Эйлера  $\chi(\eta)$  ориентированного вещественного расслоения  $\eta$  мы использовали метрику на  $\eta$  и связность в  $\eta$ . Докажите, что  $\chi(\eta)$  не зависит ни от выбора метрики, ни от выбора связности. Зависит ли класс Эйлера  $\chi(\eta)$  от выбора ориентации расслоения  $\eta$ ?

**Задача 7.** Докажите, что если у ориентированного вещественного расслоения  $\eta$  есть не обращающееся в ноль сечение, то  $\chi(\eta) = 0$ .

**Задача 8.** Пусть  $\xi$  комплексное расслоение. Как классы Чженя двойственного расслоения  $c_i(\xi^*)$  выражаются через классы Чженя  $c_i(\xi)$ ?

Пусть  $\eta$  вещественное расслоение. Как классы Понтрягина двойственного расслоения  $p_i(\eta^*)$  выражаются через классы Понтрягина  $p_i(\eta)$ ?

**Задача 9.** Найдите класс Чженя касательного расслоения  $ТСР^1$  и число Чженя  $\langle c_1(ТСР^1), [СР^1] \rangle$ .

*Указание.* Класс Чженя касательного расслоения  $ТСР^1$  можно легко найти с помощью формулы, связывающей расслоение  $(\gamma^1)^*$ , двойственное к тавтологическому, и  $ТСР^1$ .

**Задача 10.** Докажите, что если многообразие  $M$  является границей некоторого многообразия  $W$ , то все числа Понтрягина  $M$  равны нулю.

*Указание.* Вспомните о функториальности классов Понтрягина и используйте теорему Стокса.