

**НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 11.
Оператор Лапласа-Бельтрами, минимальные подмногообразия,
гармонические отображения. 30.04.2012.**

Задача 1. Доказать обобщённую теорему Гаусса-Остроградского: если риманово многообразие с краем M компактно и ориентировано, то

$$\int_M \operatorname{Div} X d\mu_M = \int_{\partial M} (X, \vec{n}) d\mu_{\partial M},$$

где \vec{n} — внешнее нормальное поле к ∂M в $TM|_{\partial M}$, а $d\mu_M$ и $d\mu_{\partial M}$ — формы объема, индуцированные (\cdot, \cdot) и $(\cdot, \cdot)|_{\partial M}$, соответственно.

Задача 2. Пусть риманово многообразие с краем M компактно и ориентировано, и $f, g \in C^\infty(M)$. Доказать, что

$$\int_M [g\Delta f - (dg, df)] d\mu_M = \int_{\partial M} g(\vec{n} \cdot f) d\mu_{\partial M},$$

где \vec{n} — внешнее нормальное поле к ∂M в $TM|_{\partial M}$, а $d\mu_M$ и $d\mu_{\partial M}$ — формы объема, индуцированные (\cdot, \cdot) и $(\cdot, \cdot)|_{\partial M}$, соответственно.

Задача 3. Вывести из предыдущей задачи, что на ориентированном компактном римановом многообразии без края в локальных координатах x^1, \dots, x^n верна формула

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right),$$

где $|g| = \det g_{ij}$. Доказать, что эта формула верна и для некомпактных и неориентируемых многообразий.

Задача 4. Пусть e_1, \dots, e_n локальный ортонормированный базис в векторных полях в некоторой окрестности точки p многообразия M , а $c_1(t), \dots, c_n(t)$ — такие геодезические, что $c_i(0) = p$ и $c'_i(0) = e_i$. Доказать, что оператор Лапласа-Бельтрами можно найти по формуле

$$\Delta f(p) = -\sum_{i=1}^n \frac{d^2}{dt^2} f(c_i(t))|_{t=0}.$$

Задача 5. Доказать, что катеноид

$$f(s, t) = (\operatorname{ch} s \cos t, \operatorname{ch} s \sin t, s)$$

является минимальной поверхностью в \mathbb{R}^3 .

Задача 6. Доказать, что геликоид

$$f(s, t) = (t \cos s, t \sin s, s)$$

является минимальной поверхностью в \mathbb{R}^3 .

Задача 7. Доказать, что поверхность Эннепера

$$f(s, t) = \left(\frac{s}{2} - \frac{s^3}{6} + \frac{st^2}{2}, -\frac{t}{2} + \frac{t^3}{6} - \frac{s^2 t}{2}, \frac{s^2}{2} - \frac{t^2}{2} \right)$$

является минимальной поверхностью в \mathbb{R}^3 .

Задача 8. Рассмотрим дважды-периодическое отображение $\Psi_{m,k} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, заданное явной формулой

$$\Psi_{m,k}(x, y) = (\cos mx \cos y, \sin mx \cos y, \cos kx \sin y, \sin kx \sin y).$$

Его образ в \mathbb{R}^4 обозначается $\tau_{m,k}$.

Доказать, что

- $\tau_{m,k}$ является погруженным (то есть с самопересечениями) подмногообразием единичной трёхмерной сферы размерности два;
- $\tau_{m,k} \cong \tau_{k,m}$;
- если $(m, k) = 1$, $(m', k') = 1$ и $(m, k) \neq (m', k')$ как неупорядоченные пары, то $\tau_{m,k} \not\cong \tau_{k',m'}$;
- пусть $(m, k) = 1$, тогда если m, k нечётные, то $\tau_{m,k}$ является тором, а если одно из чисел m, k является чётным, то $\tau_{m,k}$ является бутылкой Клейна;
- $\tau_{m,k}$ является минимальной поверхностью в \mathbb{S}^3 ;
- ограничения координатных функций объемлющего пространства на наши поверхности $x^i|_{\tau_{m,k}}$, $i = 1, \dots, 4$, являются собственными функциями оператора Лапласа-Бельтрами на $\tau_{m,k}$ с собственным числом 2;
- единственная поверхность $\tau_{m,k}$ без самопересечений — это $\tau_{1,1}$;
- индуцированная метрика на $\tau_{1,1}$ евклидова, то есть это тор Клиффорда.

Найти площадь $\tau_{m,k}$.

Поверхности $\tau_{m,k}$ с индуцированной вложением в $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ метрикой называются τ -поверхностями Лоусона, в зависимости от типа их называют также лоусоновыми торами и лоусоновыми бутылками Клейна.

Задача 9. Риманова метрика на римановой поверхности Σ называется конформной, если в локальных координатах она может быть записана как

$$\lambda^2(z) dz \otimes d\bar{z},$$

где $\lambda(z) > 0$ положительная вещественнозначная функция. Доказать, что для конформной метрики

$$\Delta = -\frac{4}{\lambda^2(z)} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Задача 10. Пусть N риманово многообразие. Доказать, что свойство отображения $f : \Sigma \rightarrow N$ римановой поверхности Σ быть гармоническим зависит только от структуры римановой поверхности, но не от выбора конформной метрики (то есть не зависит от выбора $\lambda(z)$).