НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 12.
Связности в главных расслоениях. 14.05.2012.

Задача 1. Пусть P главное расслоение со структурной группой G, и G действует (слева) на F. Доказать, что тогда $E = P \times_G F$ будет расслоением со слоем F, ассоциированным с P в смысле определения ассоциированного расслоение через склеивающие коциклы.

Задача 2. Пусть P главное расслоение над M со структурной группой G, G действует (слева) на F и $E = P \times_G F$. Мы доказали на лекции, что $C^\infty(P, F)^G$ естественно изоморфно $\Gamma(M, E)$, поэтому $C^\infty(P, F)^G$ представляет для нас большой интерес. Доказать, что если $s \in C^\infty(P, F)^G$, то

$$\forall X \in \mathfrak{g} \quad (X_P \cdot s)(x) + d\rho(X)s(x) = 0,$$

где X_P — векторное поле на P, отвечающее $X \in \mathfrak{g}$, а $d\rho$ — дифференциал действия G на F.

Задача 3. Пусть $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ действие (левое) группы G на векторном пространстве V. Рассмотрим действие группы G на пространстве $\Omega(P, V) = \Omega(P) \otimes V$ (неоднородных) V-значных дифференциальных форм на P, определенное как

$$g \cdot (\beta \otimes v) = g^*\beta \otimes \rho(g)v.$$

Тогда определено пространство G-инвариантных V-значных форм на P, которое обозначается через $\Omega(P, V)^G \subset \Omega(P, V)$. Доказать, что если $\alpha \in \Omega(P, V)^G$, то

$$\forall X \in \mathfrak{g} \quad L_X\alpha + d\rho(X)\alpha = 0,$$

где L_X действие на формах элемента алгебры, индуцированное действием группы G на главном расслоении P, а $d\rho$ — дифференциал действия G на V.

Задача 4. Докажите, что гладкость распределения горизонтальных плоскостей $HE \subset TE$ эквивалентна гладкости 1-формы связности $\omega \in \Omega^1(E, VE)$.

Задача 5. Мы определяем кривизну в произвольном расслоении $E \longrightarrow M$ как $\Omega(X, Y) = [X, Y]_E - [X_E, Y_E]$, где X_E — горизонтальное поднятие векторного поля X, определённого на базе расслоения. Доказать, что $\Omega(X, Y)$ является вертикальным векторным полем на E, то есть Ω можно рассматривать как элемент $\Gamma(\Lambda^2T^*M \otimes VE)$.

Задача 6. Доказать, что 1-форма связности на главном расслоении ω (которая по определению инвариантна!) удовлетворяет соотношению

$$\forall X \in \mathfrak{g} \quad L_X\omega + [X, \omega] = 0,$$

Задача 7. Мы определяем кривизну в главном расслоении P как

$$\Omega(X, Y)_P = P_{HP}[X, Y]_E - [P_{HP}X, P_{HP}Y],$$

где P_{HP} — проектор на горизонтальное подпространство. Доказать, что $\Omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})_{bas}$.

Задача 8. Определим горизонтальные подпространства в расслоении, ассоциированном с главным, следующим образом. Пусть A естественное отображение $A : P \times F \longrightarrow E = P \times_G F$. Выберем $x \in E$ и некоторый его прообраз $(p, f) \in A^{-1}(x)$. Тогда по определению

$$HE_x = d_{(p,f)}A(H_pP).$$

Доказать, что это определение корректно (не зависит от выбора прообраза) и что получившиеся плоскости в самом деле могут быть взяты в качестве горизонтальных.

Задача 9. Группа G действует на P справа, поэтому $X \in \mathfrak{g}$ соответствует векторное поле на P, заданное формулой

$$(X_P f)(p) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} f(p\exp(\varepsilon X)).$$

Доказать, что $VP \cong P \times \mathfrak{g}$ и найти индуцированное действие G на

$$\Omega^1(P, \mathfrak{g}) \cong \Omega^1(P, VP).$$

Задача 10. Пусть $E = P \times_G V$ векторное расслоение, а ∇ — связность. Пусть локально $\nabla = d+\omega$, где ω — локальная 1-форма связности. Доказать, что тогда локально 1-формой связности в расслоении реперов $\mathrm{GL}(E)$ будет

$$\omega_{\mathrm{GL}(E)} = \pi^*\omega + g^{-1}dg,$$

где $\pi : \mathrm{GL}(E) \longrightarrow M$ проекция в расслоении реперов, а $g \in C^\infty(\mathrm{GL}(V), \mathrm{End}(V))$ тавтологическое отображение. Форма

$$g^{-1}dg \in \Omega^1(\mathrm{GL}(V), \mathrm{End}(V))$$

называется формой Маурера-Картана.