

НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 2.

Кривые в n -мерном евклидовом пространстве.

Поверхности в трёхмерном и n -мерном евклидовом пространстве. Ковариантная производная касательных и нормальных векторов, вторая квадратичная форма и оператор Вейнгартена. 20.02.2012.

Задача 1. Рассмотрим кривую в \mathbb{E}^n , параметризованную произвольным параметром t . Пусть $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ обозначает ориентированный объём k -параллелепипеда, порожденного системой векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$. Пусть

$$V_i = \left(\frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^i x}{dt^i} \right).$$

Доказать, что кривизну и высшие кручения можно найти по формулам

$$k = \frac{V_2}{V_1^3}, \quad \kappa_i = \frac{V_{i+2}V_i}{V_{i+1}^2V_1}.$$

Задача 2. Написать параметрическое уравнение тора вращения и найти индуцированную метрику, то есть первую квадратичную форму.

Задача 3. Найти первую и вторую квадратичные формы, а также гауссову и среднюю кривизны для сферы произвольного радиуса.

Задача 4. Найти первую и вторую квадратичные формы, а также гауссову и среднюю кривизны для поверхности вращения

$$\mathbf{r}(u, \varphi) = (x(u), \rho(u) \cos \varphi, \rho(u) \sin \varphi).$$

Задача 5. Доказать, что поверхность с нулевыми гауссовой и средней кривизнами есть плоскость.

Задача 6. Доказать, что единственными поверхностями вращения имеющими нулевую среднюю кривизну являются плоскость и катеноид, получаемый вращением кривой $\left(\frac{\text{ch}(at + b)}{a}, t \right)$.

Задача 7. Доказать, что средняя кривизна есть интегральное среднее всех нормальных кривизн

$$H = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k(\varphi) d\varphi,$$

где $k(\varphi)$ — нормальная кривизна в направлении φ , отсчитываемом от одного из главных направлений.

Задача 8. Найти оператор Вейнгартена и ковариантные производные для сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Задача 9. Рассмотрим двумерную поверхность M в \mathbb{E}^3 и точку $A \in M$. Выберем нормаль \mathbf{m} в точке A . Запишем $B(X, Y)$ в виде $B(X, Y) = \hat{B}(X, Y)\mathbf{m}$, где \hat{B} некоторая обычная (вещественнозначная) квадратичная форма на касательной плоскости. Доказать, что $\hat{B}(X, Y) = \mathbf{II}(X, Y)$, то есть это вторая квадратичная форма поверхности.

Задача 10. Рассмотрим двумерную поверхность в \mathbb{E}^3 . В качестве базиса нормального пространства выберем единичный нормальный вектор $\eta_1 = \mathbf{m}$. Доказать, что $W_{\eta_1} = \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{II}$. Вывести отсюда, что определения главных кривизн для поверхностей в трёхмерном (через первую и вторую квадратичную форму) и n -мерном пространстве (через оператор Вейнгартена) совпадают.