НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 7.
Связности в векторных расслоениях. 26.03.2012.

Задача 1. Доказать, что в любом векторном расслоении существует связность.

Задача 2. Пусть ∇^1 и ∇^2 связности в векторных расслоениях $E_1 \longrightarrow M$ и $E_2 \longrightarrow M$ соответственно.

Доказать, что операция $\nabla^1 \oplus \nabla^2$, определённая как $\nabla^1 \oplus \nabla^2(s_1 + s_2) = \nabla^1 s_1 + \nabla^2 s_2$, $s_i \in \Gamma(M, E_i)$, является связностью в $E_1 \oplus E_2$. Найти локальную 1-форму связности $\nabla^1 \oplus \nabla^2$.

Доказать, что операция $\nabla^1 \otimes \nabla^2$, определённая как $\nabla^1 \otimes \nabla^2(s_1 \otimes s_2) = \nabla^1 s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^2 s_2$, $s_i \in \Gamma(M, E_i)$, является связностью в $E_1 \otimes E_2$. Найти локальную 1-форму связности $\nabla^1 \otimes \nabla^2$.

Задача 3. Пусть ∇ связность в векторном расслоении $E \longrightarrow M$. Пусть $\langle \cdot , \cdot \rangle$ естественное спаривание сечения расслоения E и сечения двойственного ему расслоения E^*. Определим операцию ∇^* из условия, что тождество $d\langle s, t\rangle = \langle \nabla s, t\rangle + \langle s, \nabla^* t\rangle$ верно для любых $s \in \Gamma(M, E)$, $t \in \Gamma(M, E^*)$. Доказать, что это связность в E^*. Найти локальную 1-форму этой связности.

Задача 4. Пусть ∇^1 и ∇^2 связности в векторных расслоениях $E_1 \longrightarrow M$ и $E_2 \longrightarrow M$ соответственно. Связность в расслоении $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ можно ввести с помощью изоморфизма $\mathrm{Hom}(E_1, E_2) \cong E_1^* \otimes E_2$ и предыдущих задач. Проверьте, что это то же самое, что определить связность формулой $(\nabla f)(s_1) = \nabla^2(f(s_1)) - f(\nabla^1 s_1)$, где $f \in \Gamma(M, \mathrm{Hom}(E_1, E_2))$, $s_1 \in \Gamma(M, E_1)$.

Задача 5. Докажите, что описанные в предыдущих задачах продолжения согласованных с метрикой связностей на прямые суммы, тензорные произведения и т.д. евклидовых (унитарных) расслоений снова будут согласованы с соответствующими метриками.

Задача 6. Пусть $\phi : N \longrightarrow M$ гладкое отображение, а ∇^E связность в векторном расслоении $E \longrightarrow M$. Докажите, что равенство $\nabla^{\phi^* E}(f \phi^* s) = df \otimes \phi^* s + f\phi^*(\nabla^E s)$, где $f \in C^\infty(N)$, $s \in \Gamma(M, E)$, определяет связность $\nabla^{\phi^* E}$ на расслоении $\phi^* E$ (обратный образ связности).

Задача 7. Пусть ω локальная 1-форма связности. Доказать, что из того, что ω преобразуется при заменах базиса в сечениях по правилу $\tilde{\omega} = T^{-1}\omega T + T^{-1}dT$, следует, что матрица кривизны $F = d\omega + \omega \wedge \omega$ преобразуется при заменах базиса в сечениях по правилу $\tilde{F} = T^{-1}FT$, а потому «склеивается» в корректно определённую глобальную 2-форму со значениями в эндоморфизмах.

Задача 8. Доказать, что значение формы кривизны на векторных полях X и Y может быть вычислено по формуле $F(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$, то есть если $s \in \Gamma(U, \xi)$, то $F(X,Y)s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s$.

Задача 9. Пусть у нас есть связность ∇ в расслоении E. Продолжим ее до связности $\nabla^{\mathrm{End}(E)}$ в расслоении $\mathrm{End}(E)$. Докажите тождество Бьянки $\nabla^{\mathrm{End}(E)} F = 0$. Перепишите это как соотношение на кривизну и 1-форму связности.

Задача 10. Пусть γ^1 универсальное расслоение над $\mathbb{C}P^n$. Рассмотрим расслоение $\mathrm{Ann}\,\gamma^1$, слой которого над точкой x состоит из ковекторов, принимающих нулевое значение на прямой γ^1_x. Построить связность на расслоении $\mathrm{Ann}\,\gamma^1$ и вычислить форму кривизны.