Вводная лекция

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение

$$x^{100}\partial_x^{50}f+(x^{51}-14)\partial_x f+(x^7+1)f,$$

т.е. записываемое в виде $Df=0$, где D$\in\mathbb{C}[x,\partial_x]$ (дифференциальные операторы одной переменной с полиномиальными коэффициентами). Легко видеть, что если $Df=0$, то $(xD)f=0,(\partial_x D)f=0$; выражения вида $D'D$ (в частности, $xD,\partial_x D$), где $D'\in\mathbb{C}[x,\partial_x]$, называются *дифференциальными следствиями* оператора D. По определению, все дифференциальные следствия D образуют левый идеал в $\mathbb{C}[x,\partial_x]$; мы обозначим его $\mathrm{I}(D)$. Если $Df=0$, то $D'f=0$ для любого $D'\in\mathrm{I}(D)$.

Замечание 1. Идеалы вида $\mathrm{I}(D)$ называются *главными*. Не все идеалы $\mathbb{C}[x,\partial_x]$ главные, но всякий идеал порождён не более, чем двумя элементами.

Пусть A — некоторая алгебра, V — векторное пространство, а $\rho:A\to\mathrm{End}(V)$ — гомоморфизм алгебр. Пара (ρ,V) называется A-модулем. Если I — левый идеал в A, то A, I и A/I есть A-модули. Мы будем называть $\mathbb{C}[x,\partial_x]$-модули Д-модулями.

Приведём четыре примера Д-модулей:

$$(1)\ \mathbb{C}[x]\cong\mathbb{C}[x,\partial_x]/\mathrm{I}(\partial_x);\quad (2)\ \mathbb{C}[x]\mathrm{e}^x\cong\mathbb{C}[x,\partial_x]/\mathrm{I}(\partial_x-1);$$
$$(3)\ \delta_0(x)\cong\mathbb{C}[x,\tfrac{1}{x}]/\mathbb{C}[x];\cong\mathbb{C}[x,\partial_x]/\mathrm{I}(x)\quad (4)\mathbb{C}[x,\tfrac{1}{x}]\sqrt{x}\cong\mathbb{C}[x,\partial_x]/\mathrm{I}(x\partial_x-\tfrac{1}{2}).$$

Отметим, что векторное пространство $\mathbb{C}[x]\sqrt{x}$ не является Д-модулем в естественном смысле.

Мы хотим убедить читателя в том, что решение дифференциальных уравнений — это изучение Д-модулей и естественных функторов для них. Пусть D — дифференциальный оператор, а $Df=0$ — соответствующее ему дифференциальное уравнение. Пусть $\mathrm{Func}(\mathbb{C})$ — замкнутое относительно взятия производной пространство функций. Тогда всякому решению $f\in\mathrm{Func}$ соответствует гомоморфизм

$$\phi:\mathbb{C}[x,\partial_x]\to\mathrm{Func}\ (D\to Df).$$

По определению $\mathrm{I}(D)$ лежит в его ядре, и, следовательно, f задаёт гомоморфизм

$$\phi_*:\mathbb{C}[x,\partial_x]/\mathrm{I}(D)\to\mathrm{Func}\ (D\to Df).$$

Обратно, всякий гоморфизм Д-модулей $\phi:\mathbb{C}[x,\partial_x]\to\mathrm{Func}$ задаёт решение уравнения $Df=0$ как образ 1. Таким образом, решить уравнение $Df=0$ это всё равно что описать пространство

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[x,\partial_x]}(M,\,\mathrm{Func})$$

для некоторого Д-модуля M (более подробно и развёрнуто мотивация к изучению именно Д-модулей представлена в книжке [KS]).

Упражнение 1. Опишите $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[x,\partial_x]}(M,\,\mathrm{Func})$ для модулей (1), (2), (3), (4), где Func — голоморфные функции на $\mathbb{C}$.

Для любого "содержательного"Д-модуля и разумного пространства функций

$$\dim\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[x,\partial_x]}(M,\,\mathrm{Func})<\infty.$$

Теперь можно огласить основную цель данного курса: описать все "содержательные"Д-модули, сопоставив каждому из них "каноническое"решение, в специально подобранном пространстве функций.

Перейдём к алгебраическим конструкциям, помогающим при работе с Д-модулями. Алгебра $\mathbb{C}[x,\partial_x]$ обладает фильтрацией Бернштейна

$$B_n:=\langle x^i\partial_x^j\rangle_{i+j\le n}(n\ge 0).$$

Легко видеть, что $B_iB_j\subset B_{i+j}$ для любых i,j. Присоединённая градуированная алгебра

$$\oplus_{i\ge 0}B_i/B_{i-1}(B_{-1}=\{0\})$$

есть свободная коммутативная градуированная алгебра $\mathbb{C}[\bar{x},\bar{\partial}_x]$, где степени образующих равны 1. Пусть M — конечнопорождённый $\mathbb{C}[x,\partial_x]$-модуль с порождающим пространством M_0. Определим

$M_i := B_i M_0$. Тогда присоединённый градуированный модуль $\mathrm{gr}M := \oplus_{i\geq 0} M_i/M_{i-1}$ является конечно порождённым градуированным $\mathbb{C}[\bar{x}, \bar{\partial}_x]$-модулем.

Как известно, конечно порождённые модули коммутативных алгебр эквивалентны пучкам на спектре этих алгебр (спектр $\mathbb{C}[\bar{x}, \bar{\partial}_x]$ есть $\mathbb{C}^2$). Пучки с плотным носителем являются, после ограничения на открытое подмножество, сечениями алгебраических расслоений.

Таким образом, модулю $\mathrm{gr}M$ можно сопоставить подмногообразие $\mathrm{SSupp}^B M \subset \mathbb{C}^2$. По определению оно совпадает с множеством общих нулей аннулятора $\mathrm{gr}M$ в $\mathbb{C}^2$.

Упражнение 2. Многообразие $\mathrm{SSupp}^B M$ инвариантно относительно умножения на константы и не зависит от выбора порождающего пространства M_0.

Упражнение 3. Найдите $\mathrm{SSupp}^B M$ для модулей (1), (2), (3), (4).

Так как $\mathrm{SSupp}^B M$ сохраняется умножениями на константы и алгебраично, оно есть или точка 0, или объединение нескольких прямых, проходящих через 0, или вся плоскость. В первом случае

$$\dim\ \mathrm{SSupp}^B M = 0.$$

Теорема 2. Пусть M — ненулевой конечнопорождённый Д-модуль. Тогда $\dim\ \mathrm{SSupp}^B M > 0$.

Доказательство. Если $\dim\ \mathrm{SSupp}^B M = 0$, то $\dim M < \infty$. Тогда ядро

$$\rho : \mathbb{C}[x, \partial_x] \to \mathrm{End}(M)$$

имеет конечную коразмерность. В частности, $\mathrm{Ker}\rho$ – двусторонний идеал в $\mathbb{C}[x, \partial_x]$ конечной коразмерности.

Пусть D — произвольный ненулевой элемент $\mathbb{C}[x, \partial_x]$. Действуя на него

$$[x, \cdot] : D' \to xD' - D'x \text{ и } [\partial_x, \cdot] : D' \to \partial_x D' - D'\partial_x$$

мы всегда можем получить 1. Таким образом, двусторонний идеал, содержащий D, содержит 1. Следовательно, $\mathbb{C}[x, \partial_x]$ не имеет собственных идеалов и, в частности, идеалов конечной коразмерности. □

Определение 3. Д-модуль M называется ***голономным***, если $\dim\ \mathrm{SSup}^B M$ минимально, т.е. равно 1.

Упражнение 4. Покажите, что $\mathrm{SSupp}^B M$ может совпадать с любой прямой проходящей через 0.

Алгебра $\mathbb{C}[x, \partial_x]$ обладает также фильтрацией

$$\mathrm{D}^{\leq n} := \langle x^i \partial_x^j \rangle_{j\leq n}$$

по степеням дифференциальных операторов. Ей соответствует своя присоединённая градуированная алгебра $\mathbb{C}[x, \partial_x]$, которая также совпадает с $\mathbb{C}[\bar{x}, \bar{\partial}_x]$, но степени образующих другие: 0 у x и 1 у ∂_x. Всякому конечнопорождённому Д-модулю соответствует свой носитель $\mathrm{SSupp}^D M \subset \mathbb{C}^2$ относительно этой фильтрации. По определению $\mathrm{SSupp}^D M$ сохраняется умножением на константу второй переменной. Как следствие $\mathrm{SSupp}^D M$ *почти никогда* не совпадает с $\mathrm{SSupp}^B M$. Впрочем...

Упражнение 5. Посчитайте SSupp^D для модулей (1), (2), (3), (4).

Упражнение 6. Укажите Д-модуль, для которого SSupp^D не совпадает с $\mathrm{SSupp}^B M$.

Автоморфизмы $\mathbb{C}^2$ порождают безумную группу автоморфизмов алгебры $\mathbb{C}[x, \partial_x]$, что приводит к безумному числу неэквивалентных фильтраций на алгебре $\mathbb{C}[x, \partial_x]$, а каждая такая фильтрация порождает своё ассоциированное многообразие. Это большое (и, на текущий момент, плохо проанализированное) множество инвариантов, должно полностью описывать Д-модуль. В данном курсе будет изложена классификация Д-модулей относительно *одной* фильтрации $\{\mathrm{D}^{\leq n}\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$.

Алгебра $\mathbb{C}[x, \partial_x]$ обладает автоморфизмом

$$\mathrm{Fou}\colon x \to i\partial_x, \quad \partial_x \to ix.$$

Всякий Д-модуль $\rho : \mathbb{C}[x, \partial_x] \to \mathrm{End}(M)$ можно, "подкрутить"с помощью автоморфизма:

$$\mathrm{Fou}\rho(D) = \rho(\mathrm{Fou}(D)).$$

Это преобразование на модулях родственно преобразованию Фурье на функциях.

Упражнение 7. Опишите модули $\mathrm{Fou}(M)$, если M совпадает с (1), (2), (3), (4).

Упражнение 8. Объясните как связаны $\mathrm{SSupp}^B M$ и $\mathrm{SSupp}^B \mathrm{Fou} M$.

Имеется конструкция принадлежащая М. Концевичу и А. Канель-Белову [KB], позволяющая сопоставить модулю достаточно случайную кривую в $\mathbb{C}^2$, несвязанная с какой-либо фильтрацией, и, как мне верится, дающая наиболее правильное определение носителя Д-модуля, из которого все носители, связанные с фильтрациями, должны тривиально считаться.

Конструкция сопоставляет дифференциальному оператору $D \in \mathbb{Q}[x, \partial_x]$ многочлен $f_D \in \mathbb{Q}[\bar{x}, \bar{\partial}_x]$. При этом $\mathrm{Supp}^{KB}(\mathbb{Q}[x, \partial_x]/\mathrm{I}(D))$ совпадает с множеством нулей f_D.

Всякому простому числу p (взаимно простому со всеми знаменателями D) можно сопоставить редукцию $D_p \in \mathbb{Z}_p[x, \partial_x]$ по модулю p. Центр кольца $\mathbb{Z}_p[x, \partial_x]$ совпадает с $\mathbb{Z}_p[x^p, \partial_x^p]$. Пусть $\bar{x}$ и $\bar{\partial}_x$ — новые формальные переменные. Отобразим $\mathbb{Z}_p[x^p, \partial_x^p]$ в $\mathbb{Z}_p[\bar{x}, \frac{1}{\bar{x}}, \bar{\partial}_x, \frac{1}{\bar{\partial}_x}]$ по правилу

$$x^p \to \bar{x}^p, \partial_x^p \to \bar{\partial}_x^p.$$

Таким образом, имеем вложение

$$\mathbb{Z}_p[x, \partial_x] \to \mathbb{Z}_p[x, \partial_x] \otimes_{\mathbb{Z}_p[x^p,\ \partial_x^p]} \mathbb{Z}_p[\bar{x}, \tfrac{1}{\bar{x}}, \bar{\partial}_x, \tfrac{1}{\bar{\partial}_x}].$$

Так как

$$\mathbb{Z}_p[x, \partial_x] \otimes_{\mathbb{Z}_p[x^p, \partial_x^p]} \mathbb{Z}_p[\bar{x}, \tfrac{1}{\bar{x}}, \bar{\partial}_x, \tfrac{1}{\bar{\partial}_x}] \cong \mathrm{Mat}_{p\times p}(\mathbb{Z}_p[\bar{x}, \tfrac{1}{\bar{x}}, \bar{\partial}_x, \tfrac{1}{\bar{\partial} x}]),$$

для всякого $f \in \mathbb{Z}_p[x, \partial_x]$ задан определитель $\mathrm{det} f \in \mathbb{Z}_p[\bar{x}, \frac{1}{\bar{x}}, \bar{\partial}_x, \frac{1}{\bar{\partial}_x}]$. Итак, $\mathrm{det} D_p \in \mathbb{Z}_p[\bar{x}, \frac{1}{\bar{x}}, \bar{\partial}_x, \frac{1}{\bar{\partial} x}]$. На самом деле $\mathrm{det} D_p \in \mathbb{Z}[x^p, \partial_x^p]$ [KB], и, следовательно, $\sqrt[p]{\mathrm{det} D_p} \in \mathbb{Z}[\bar{x}, \bar{\partial}_x]$.

Теорема 4 ([KB])**.** Существует и единственная функция $f_D \in \mathbb{Q}[\bar{x}, \bar{\partial}_x]$ такая, что $f_D = \sqrt[p]{\mathrm{det} D_p} (\mathrm{mod}\ p)$ для большого числа простых p.

Отметим, что из определения $f_{D_1 D_2} = f_{D_1} f_{D_2}$ и что отображение $D \to f_D$ алгебраично.

Пользуясь случаем, хочу порекомендовать книгу Хангерфорда как источник общеалгебраических теорем и конструкций, книгу Кутиньо как хорошее введение в Д-модули, lib.homelinux.org с IE как источник литературы.

Список литературы

[KS] М. Касивара, П. Шапира, Пучки на многообразиях.

[KB] М. Концевич, А. Канель-Белов, arxiv: 0512171, см. также arXiv:1010.2908.

[H] T. Hungerford, Algebra.

[Cou] S. Coutinho, A primer of algebraic D-modules.