Вокруг размерности Гельфанда-Кириллова

Напомним, что $D := \mathbb{C}[x, \partial_x]$ — алгебра дифференциальных операторов одной переменной, с фильтрацией $B_n := \langle x^i \partial_x^j \rangle_{i+j \le n}$, gr $D := \oplus_i B_i/B_{i-1} \cong \mathbb{C}[p,q]$. Легко понять, что

$$P_D(t) := \oplus_n \dim(B_n/B_{n-1})t^n = \tfrac{1}{(1-t)^2}.$$

Также $\dim(B_n/B_{n-1}) = n+1$, $\dim B_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Если M — конечнопорождённый D – модуль, с порождающим пространством M_0, то он обладает фильтрацией $M_n := B_n M_0$, и, соответственно, $\mathrm{gr} M = \oplus_i (M_i/M_{i-1})$. Аналогично определяется

$$P_D(M_0, t) = \oplus_n \dim(M_n/M_{n-1})t^n.$$

Известно, что $P_D(M_0,t)$ — рациональная функция, и, соответственно,

$$\dim(M_i/M_{i-1}) = f_{M_0}(i)$$

для какого-то многочлена $f_{M_0} \in \mathbb{C}[t]$ и всех достаточно больших i. Откуда

$$\dim(M_i) = g_{M_0}(i)$$

для какого-то многочлена $g_{M_0} \in \mathbb{C}[t]$ и всех достаточно больших i. Легко видеть, что $\deg g = \deg f + 1$. Прямая проверка показывает, что $\deg g$ совпадает с размерностью ассоциированного многообразия M [Eis]. Обозначим как $|\mathrm{V}_{M_0}(M)|$ старший коэффициент $\mathrm{g}_{M_0}(t)$.

Предложение 1. Если M — это D-модуль, а M_0, M_0' — два его порождающих пространства, то

$$\deg g_{M_0} = \deg g_{M_0'}, \quad |\mathrm{V}_{M_0}(M)| = |\mathrm{V}_{M_0'}(M)|.$$

Доказательство. Из определения существует s такое, что $M_0 \subset M_s'$ и $M_0' \subset M_s$. Откуда для всякого $i \ge 0$ имеем

$$M_i \subset M_{i+s}', \quad M_i' \subset M_{i+s},$$

и, соответственно,

$$\dim M_i \le \dim M_{i+s}', \quad \dim M_i' \le \dim M_{i+s}.$$

Откуда для всех $i >> 0$

$$g_{M_0}(i) \le g_{M_0'}(i+s), \quad g_{M_0'}(i) \le g_{M_0}(i+s).$$

Откуда искомое утверждение очевидно следует. □

Далее мы опускаем порождающее пространство M_0 в обозначении $|\mathrm{V}_{M_0}(M)|$. Число $|\mathrm{V}(M)|$ всегда цело, и положительно для любого ненулевого D-модуля M.

Пусть снова M_0, M_0' — порождающие пространства D-модуля M. Тогда существует s такое, что $M_0 \subset M_s'$ и $M_0' \subset M_s$. Фильтрация $M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_i \subset ...$ ограничивается на всякое пространство M_j', что задаёт фильтрацию пространства M_j'/M_{j-1}'. Легко видеть, что

$$\text{если } i > j+s, \text{ то } M_i \cap M_j' = M_j',$$

и

$$\text{если } i < j-s, \text{ то } M_i \cap M_j' \subset M_{j-1}.$$

Рассмотрим градуированное пространство

$$\mathrm{gr}_{M_0,M_0'} M := \oplus_{i,j}(M_i \cap M_j'/(M_i \cap M_{j-1}' + M_{i-1} \cap M_j')).$$

Из предыдущих формул следует, что если $|i-j| > s$, то (i,j)-компонента $\mathrm{gr}_{M_0,M_0'} M$ равна 0.

Упражнение 1. Наделите $\mathrm{gr}_{M_0,M_0'} M$ структурой градуированного $\mathbb{C}[p,q]$-модуля так, чтобы он был изоморфен присоединённо градуированному модулю модуля $\mathrm{gr}_{M_0} M$ относительно некоторой фильтрации $2(s+1)$-им $\mathbb{C}[p,q]$-модулем и присоединённо градуированному модулю модуля $\mathrm{gr}_{M_0'} M$ относительно некоторой фильтрации $(2s+1)$-им $\mathbb{C}[p,q]$-модулем.

Упражнение 2. Используя предыдущее упражнение покажите, что носитель не зависит от выбора образующего пространства M_0.

Определение 2. *Голономным* называется конечнопорождённый D-модуль M, носитель которого одномерен, или, что эквивалентно, $\deg g = 1$.

Всякий подмодуль и фактормодуль голономного модуля голономен.

Лемма 3. Пусть

$$0 \to M[-1] \to M[0] \underset{\phi}{\to} M[1] \to 0$$

суть точная последовательность голономных D-модулей. Тогда

$$\mathrm{V}(M[0]){=}\mathrm{V}(M[-1]){+}\mathrm{V}(M[1]) \text{ и } |\mathrm{V}(M[0])|{=}|\mathrm{V}(M[-1])|{+}|\mathrm{V}(M[1])|.$$

Доказательство. Пусть M_0 — порождающее пространство $M[0]$, а M_i — задаваемая им фильтрация. Она задаёт фильтрации $M[-1] \cap M_i$ на модуле $M[-1]$, а $\phi(M_i)$ есть фильтрацию на $M[1]$.

Легко видеть, что присоединённые градуированные модули относительно этих фильтраций образуют точную последовательность

$$0 \to \mathrm{gr}_{M_0} M[-1] \to \mathrm{gr}_{M_0} M[0] \to \mathrm{gr}_{M_0} M[1] \to 0.$$

Очевидно, что $B_n M_i = M_{i+n}$, $B_n \phi(M_i) = \phi(M_{i+n})$, но, вообще говоря,

$$B_n(M_i \cap M[-1]) \neq M_{i+n} \cap M[-1].$$

Читателю предлагается проверить, что существует $s \geq 0$ такое, что

$$B_n(M_{s+i} \cap M[-1]) = M_{s+i+n} \cap M[-1]$$

для всяких $i, n \geq 0$. Замена образующего пространства M_0 на пространство M_s завершает доказательство так как для точных последовательностей $\mathbb{C}[p, q]$ конечнопорождённых модулей утверждение леммы очевидно [Eis]. □

Покажем теперь, что всякий голономный модуль имеет конечную длину. Так как алгебра D — нётерова, достаточно проверить артиновость всякого голономного модуля [H].

Предложение 4. Пусть $M = M[0] \supset M[-1] \supset \ldots \supset M[-n] \supset \ldots$ — убывающая цепочка D-модулей, где M — голономен. Тогда $M[-n] \cong M[-n-1]$ для $n >> 0$.

Доказательство. По лемме 3 имеем

$$|\mathrm{V}(M)|{=}\oplus_i |\mathrm{V}(M[-i]/M[-i-1])|.$$

Так как все числа справа целые неотрицательные, число положительных среди них конечно. По Теореме Бернштейна, если $|\mathrm{V}(M[-i]/M[-i-1])|{=}0$, то $M[-i]/M[-i-1] \cong 0$. Что завершает доказательство. □

Упражнение 3. Покажите, что длина голономного D-модуля M не превосходит $|\mathrm{V}(M)|$.

Нам потребуется следующая абстрактная алгебраическая лемма.

Лемма 5. Пусть D — простое нётерово кольцо, не являющееся артиновым слева, а M — конечнопорождённый артинов D-модуль. Тогда M — *цикличен*, то есть $M = D/I$ для некоторого левого идеала I.

Доказательство. Так как D — нётерово, M — нётеров, и, следовательно, имеет конечную длину. Будем вести доказательство по индукции.
Утверждение n: все D-модули длины не более n цикличны.
База: если длина M равна 1, то он — цикличен.
Переход: пусть M' — собственный простой подмодуль, а $v \in M'$ — ненулевой элемент. По предположению индукции существует $\tilde{u} \in M/M'$ такой, что $D\tilde{u} = M/M'$. Пусть u — любой прообраз $\tilde{u}$ в M. Тогда $Du + Dv = M$. Так как M имеет конечную длину, $Du \subset M$ имеет конечную длину. В частности, $Du \neq D$ как левый D-модуль так как D не артиново как левый D-модуль. Откуда существует $d \in D$, для которого $du = 0$, $d \neq 0$. Отметим, что $DdD = D$ (D — проста). Откуда $DdDv = Dv \neq 0$. В частности, существует $r \in D$ такое, что $drv \neq 0$.

Покажем, что $D(u + rv) = Du + Dv = M$. Имеем

$$d(u + rv) = du + drv = drv \neq 0.$$

Так как $drv \in Dv$ и D-модуль Dv прост, $v \in Ddrv$. Откуда $v \in D(u + rv)$. Но тогда и

$$u = (u + rv - rv) \in D(u + rv).$$

$\square$

Доказательство взято из [Cou].

Следствие 6. Для $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуля M следующие условия эквивалентны :
1) M — голономен.
2) M имеет конечную длину.
3) M изоморфен $\mathbb{C}[x, \partial_x]/I$, где I — нетривиальный левый идеал.

Доказательство. Из 1) следует 2) по предложению 4 и тексту перед ним. Из 2) следует 3) по лемме 5. Осталось показать, что из 3) следует 1). Пусть $d \in I$ — ненулевой элемент. Тогда для какого-то $n \geq 1$ имеем $d \in B_n$ и $d \notin B_{n-1}$. Тогда образ d в B_n/B_{n-1} аннулирует $\mathrm{V}(M)$ и, следовательно, $\dim \mathrm{V}(M) \leq 1$. Откуда M — голономен. $\square$

Далее идёт материал, не поместившийся в лекционное время и предоставленный слушателям как набор упражнений.

Упражнение 4. Пусть на D-модуле M задана фильтрация $\{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ такая, что
1) $B_n M_i = M_{i+n}$ для всяких i, n,
2) для каких-то $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и всякого $n \geq 0$ верно, что $\dim M_n \leq c_1 n + c_2$.
Покажите, что тогда модуль M голономен и $|\mathrm{V}(M)| \leq c_1$.

Упражнение 5. а) Пусть $p \in \mathbb{C}[x]$ — многочлен. Постройте фильтрацию со свойствами, указанными в упражнении 4 для D-модуля $\mathbb{C}[x, \frac{1}{p}]$.
б) Наделите $\mathbb{C}(\lambda)[x, \frac{1}{p}]p^\lambda$ структурой $\mathbb{C}(\lambda)[x, \partial_x]$-модуля. Укажите для этого модуля $\mathbb{C}(\lambda)$-фильтрацию со свойствами, указанными в упражнении 4.
в) Покажите, что для всякого многочлена $p(x)$ существует дифференциальный оператор $D(x, \lambda)$ с полиномиальными по λ и x коэффициентами и приведённый многочлен $b(\lambda)$, для которых

$$D(x, \lambda)p^\lambda = b(\lambda)p^{\lambda-1}.$$

Многочлен $b(\lambda)$ наименьшей степени называется *полиномом Бернштейна* многочлена $p(x)$.
г) Найдите полином Бернштейна для $p(x) = x, x^2, x^2 - 1$.

Корни полинома Бернштейна — неположительные рациональные числа.

Пусть $p \in \mathbb{C}[x]$ — многочлен, а M — произвольный голономный D-модуль M с порождающим пространством M_0. Локализацией D-модуля M по (p) называется

$$M[\tfrac{1}{p}] := M \otimes_{\mathbb{C}[x]} \mathbb{C}[x, \tfrac{1}{p}].$$

Это пространство автоматически наделено структурой $\mathbb{C}[x]$-модуля. Структура D-модуля доопределяется действием ∂_x :

$$\partial_x(m \otimes f) = (\partial_x m) \otimes f + m \otimes (\partial_x f).$$

Упражнение 6. а) Проверьте, что это действие корректно, в частности, что $[x, \partial_x] = 1$ при действии на $M[\frac{1}{p}]$.
б) Проверьте используя упражнение 4, что $M[\frac{1}{p}]$ — голономный D-модуль.

Список литературы

[H] T. Hungerford, Algebra.

[Cou] S. Coutinho, A primer of algebraic D-modules.

[Eis] D. Eisenbud, Commutative algebra, with a view toward algebraic geometry.