Когерентные модули и регулярные особенности.

На прошлом занятии для всякого многочлена $p \in \mathbb{C}[x]$ мы определили локализацию $M[p^{-1}]$. Сопоставляя открытому множеству $U_p := \{x \in \mathbb{C} \mid p(x) \neq 0\}$ алгебру $\mathbb{C}[x, \frac{1}{p}, \partial_x]$ и её модуль $M[p^{-1}]$, определяем пучок алгебр $\mathcal{D}$ и пучок её модулей $\mathcal{M}$. Следуя языку пучков,

$$\mathcal{O}(U_p) := \mathbb{C}[x, \tfrac{1}{p}], \quad \mathcal{D}(U_p) := \mathbb{C}[x, \partial_x] \otimes_{\mathbb{C}[x]} \mathbb{C}[x, \tfrac{1}{p}], \quad \mathcal{M}(U_p) := M \otimes_{\mathbb{C}[x]} \mathbb{C}[x, \tfrac{1}{p}].$$

Также, следуя языку пучков, определим для любой точки $a \in \mathbb{C}$ функции в формальной окрестности $\mathcal{O}_a \subset \mathbb{C}(x)$ ($\mathbb{C}[x] \subset \mathcal{O}_a$ и в $\mathcal{O}_a$ все функции, не делящиеся на $x-a$, обратимы). Аналогично определяются дифференциальные операторы и сечения в формальной окрестности точки a

$$D_a := \mathbb{C}[x, \partial_x] \otimes_{\mathcal{O}(\mathbb{C})} \mathcal{O}_a, \quad \mathcal{M}_a := M \otimes_{\mathcal{O}(\mathbb{C})} \mathcal{O}_a.$$

Упражнение 1. а) Придумайте аналог фильтрации Бернштейна для $\mathcal{D}(U)$. Что будет аналогом носителя модуля относительно этой фильтрации?
б) Продумайте как взаимодействует переход к открытому множеству $U \subset \mathbb{C}$ с фильтрацией по степеням дифференциальных операторов. Что происходит при переходе $\mathbb{C} \to U$ с носителем модуля относительно этой фильтрации?

Определение 1. Модуль $\mathcal{M}$ пучка $\mathcal{D}$ называется *голономным*, если $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ голономен как $\mathcal{D}(\mathbb{C})$-модуль.

Пусть $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ — некоторый многочлен, а U – соответствующее ему открытое подмножество в $\mathbb{C}$. Оказывается, что при локализации (ограничении на открытое подмножество в $\mathbb{C}$), информация о $\mathcal{D}(\mathbb{C})$-модуле практически не теряется (см. упражнение 8), а у самого $\mathcal{D}(\mathbb{C})$-модуля могут появиться новые важные свойства.

Определение 2. Модуль M алгебры $\mathcal{D}$ называется *U-когерентным*, если $\mathcal{M}(U)$ конечно порождён как $\mathcal{O}(U)$-модуль.

Упражнение 2. Всякий конечно порождённый U-когерентный $\mathcal{D}$-модуль голономен.

Введём четыре $\mathcal{D}$-модуля, определяемых $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модулями:

$$(1)\ \mathbb{C}[x] \cong \mathbb{C}[x, \partial_x]/\mathrm{I}(\partial_x); \quad (2)\ \mathbb{C}[x]\mathrm{e}^x \cong \mathbb{C}[x, \partial_x]/\mathrm{I}(\partial_x - 1);$$
$$(3)\ \delta_0(x) \cong \mathbb{C}[x, \tfrac{1}{x}]/\mathbb{C}[x]; \cong \mathbb{C}[x, \partial_x]/\mathrm{I}(x) \quad (4) \mathbb{C}[x, \tfrac{1}{x}]\sqrt{x} \cong \mathbb{C}[x, \partial_x]/\mathrm{I}(x\partial_x - \tfrac{1}{2}).$$

Упражнение 3. Определите какие из четырёх указанных $\mathcal{D}$-модулей $\mathbb{C}$-когерентны.

Легко видеть, все подмодули и все фактормодули всякого U-когерентного $\mathcal{D}$-модуля U-когерентны.

Теорема 3. Для всякого голономного $\mathcal{D}$-модуля $\mathcal{M}$ существует $U \subset \mathbb{C}$, относительно которого он U-когерентен.

Доказательство. Пусть M — это $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуль. Тогда $M \cong \mathbb{C}[x, \partial_x]/I$. Пусть $d \in I$ и

$$d = a_n \partial_x^n + a_{n-1} \partial_x^{n-1} + ... + a_1 \partial_x + a_0,$$

где $a_i \in \mathbb{C}[x]$. Заметим, что

$$(\mathbb{C}[x, \partial_x]/(d))[a_n^{-1}] = \mathbb{C}[x, \tfrac{1}{a_n}, \partial_x]/(d) = \mathbb{C}[x, \tfrac{1}{a_n}, \partial_x]/(\tfrac{d}{a_n}),$$

где (d) — левый идеал, порождённый d. Заметим, что $\mathbb{C}[x, \frac{1}{a_n}, \partial_x]$-модуль $\mathbb{C}[x, \frac{1}{a_n}, \partial_x]/(\frac{d}{a_n})$ конечно порождён как $\mathbb{C}[x, \frac{1}{a_n}]$-модуль. Так как $M[a_n^{-1}]$ есть фактор $\mathbb{C}[x, \frac{1}{a_n}, \partial_x]/(\frac{d}{a_n})$, $M[a_n^{-1}]$ также конечно порождён как $\mathbb{C}[x, \frac{1}{a_n}]$-модуль. То есть $\mathcal{M}$ является U_{a_n}-когерентным. $\square$

Упражнение 4. Установите все открытые (по Зарисскому) подмножества U, для которых U-когерентны модули (1)–(4).

Лемма 4. Если $\mathcal{D}_a$-модуль $\mathcal{M}_a$ конечно порождён как $\mathcal{O}_a$-модуль, то он свободен как $\mathcal{O}_a$-модуль.

Доказательство. Без ограничения общности считаем $a = 0$. Тогда функция $x \in \mathcal{O}_a$ является образующей единственного максимального идеала кольца $\mathcal{O}_a$. Тогда $\cap_i (x^i M_a) = 0$ [AM]. Аналогично $\cap_i (x^i \mathcal{O}_a) = 0$. Очевидно, что эта (убывающая) фильтрация на $\mathcal{O}_a$ мультипликативна и

$$\mathrm{gr}\mathcal{O}_a := \oplus_i (x^i \mathcal{O}_a / x^{i+1}\mathcal{O}_a) \cong \mathbb{C}[x^{\mathrm{loc}}]$$

(считаем, что $x^{-1}\mathcal{O}_a = \mathcal{O}_a$). Откуда $\mathrm{gr}\mathcal{M}_a := \oplus_i (x^i \mathcal{M}_a / x^{i+1}\mathcal{M}_a)$ — градуированный конечно порождённый $\mathbb{C}[x^{\mathrm{loc}}]$-модуль; умножение на x^{loc} сдвигает градуировку на 1.

Заметим, что $\partial_x(x^i M_a) \subset (x^{i-1}M_a)$ (правило Лейбница). Это позволяет ввести оператор

$$\partial_x^{\mathrm{loc}}(i) : (x^i \mathcal{M}_a / x^{i+1}\mathcal{M}_a) \to (x^{i-1}\mathcal{M}_a / x^i \mathcal{M}_a),$$

и, соответственно, действие $\partial_x^{\mathrm{loc}}$ на $\mathrm{gr}\mathcal{M}_a$; $\partial_x^{\mathrm{loc}}$ сдвигает градуировку на -1. Легко видеть, что

$$[x^{\mathrm{loc}}, \partial_x^{\mathrm{loc}}] = 1,$$

что показывает, что алгебра $\mathbb{C}[x^{\mathrm{loc}}, \partial_x^{\mathrm{loc}}]$, порождённая в $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{gr}\mathcal{M}_a)$ операторами x^{loc} и $\partial_x^{\mathrm{loc}}$, изоморфна $\mathbb{C}[x, \partial_x]$. Т.е. $\mathrm{gr}\mathcal{M}_a$ — это $\mathbb{C}[x, \partial_x] \cong \mathbb{C}[x^{\mathrm{loc}}, \partial_x^{\mathrm{loc}}]$-модуль.

Положим

$$(\mathrm{gr}\mathcal{M}_a)^{\partial_x^{\mathrm{loc}}} := \{m \in \mathrm{gr}\mathcal{M}_a \mid \partial_x^{\mathrm{loc}} m = 0\}.$$

Так как $\mathrm{gr}\mathcal{M}_a$ градуирован положительными числами, а $\partial_x^{\mathrm{loc}}$ сдвигает градуировку на -1, то

$$(\mathrm{gr}\mathcal{M}_a)^{\partial_x^{\mathrm{loc}}} \neq 0.$$

Пусть $s_1, ..., s_k$ — базис в $(\mathrm{gr}\mathcal{M}_a)^{\partial_x^{\mathrm{loc}}}$. Так как $\partial_x^{\mathrm{loc}} s_i = 0$ для любого i, $\mathbb{C}[x^{\mathrm{loc}}, \partial_x^{\mathrm{loc}}]s_i \cong \mathbb{C}[x]s_i$ для любого i. Имеем отображение

$$\phi : \langle s_i \rangle_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x] \cong \oplus_i \mathbb{C}[x^{\mathrm{loc}}]s_i \to \mathrm{gr}\mathcal{M}_a.$$

Так как $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуль $\mathbb{C}[x]$-прост, то ядро ϕ есть тензорное произведение $K \subset \langle s_i \rangle_i$ и $\mathbb{C}[x]$. С другой стороны, вектора $\{s_i\}_i$ линейно независимы и, следовательно, $V = 0$, то есть ϕ — инъективно (это утверждение можно проверить и непосредственно, в качестве упражнения).

Покажем, что ϕ — сюръективно. Пусть $\tilde{m} \in \mathrm{gr}\mathcal{M}_a / \mathrm{Im}d\phi$ — ненулевой элемент. Так как действие $\partial_x^{\mathrm{loc}}$ сдвигает градуировку на -1, мы можем считать (заменяя $\tilde{m}$ на $(\partial_x^{\mathrm{loc}})^t \tilde{m}$), что $\partial_x^{\mathrm{loc}} \tilde{m} = 0$. Пусть m — произвольный прообраз $\tilde{m}$ в $\mathrm{gr}\mathcal{M}_a$. тогда $\partial_x^{\mathrm{loc}} m \in \mathrm{Im}\phi$. Так как для любого набора $f_1, ..., f_k \in \mathbb{C}[x^{\mathrm{loc}}]$ существуют $g_1, ..., g_k \in \mathbb{C}[x^{\mathrm{loc}}]$, такие что

$$\partial_x^{\mathrm{loc}}(\sum_i g_i s_i) = (\sum_i f_i s_i),$$

существует элемент $m' \in \mathrm{Im}\phi$, для которого $\partial_x^{\mathrm{loc}} m' = \partial_x^{\mathrm{loc}} m \in \mathrm{Im}\phi$. Откуда $\partial_x^{\mathrm{loc}}(m - m') = 0$, и, следовательно, $m \in \mathrm{Im}\phi$ и $\tilde{m} = 0$.

Так как ϕ сюръективно и инъективно, $\mathrm{gr}\mathcal{M}_a$ свободен как $\mathrm{gr}\mathcal{O}_a$-модуль. Откуда $\mathcal{M}_a$ свободен как $\mathcal{O}_a$-модуль [AM]. □

Следствие 5. Пусть $\mathcal{M}$ — это U-когерентный $\mathcal{D}$-модуль. Тогда $\mathcal{M}$ гладок в каждой точке U [Eis].

Хорошо известно, что когерентные гладкие (в каждой точке) пучки интерпретируются как пространства сечения расслоений. Пусть пучок $\mathcal{D}$-модулей $\mathcal{M}$ после ограничения на некоторую окрестность U свободен, то есть $\mathcal{M}(U) = \mathcal{O}(U)s_1 \oplus ... \oplus \mathcal{O}(U)s_k$ для некоторых сечений $s_1, ..., s_k$ соответствующего расслоения. Для действия ∂_x имеем

$$\nabla s_i := \partial_x s_i = \sum_j A_i^j s_j, \quad \nabla s = As,$$

где $A_i^j \in \mathcal{O}(U)$. Структура $\mathcal{D}$-модуля полностью задаётся матрицей A. Рассмотрим новый базис пространства сечений, определяемый матрицей перехода F; обозначим соответствующую ему матрицу как B. Тогда

$$BFS = \nabla(FS) = \partial_x FS + FAS,$$

откуда

$$\partial_x F = BF - FA, \quad B = FAF^{-1} + (\partial_x F)F^{-1}.$$

Отметим, что это нетензорный закон преобразования матрицы A к матрице B, т.к. в нём участвует производная F. Оператор, преобразующийся по такому закону при переходе к новому базису, называется *связностью.*

Определение 6. Связность называется *мероморфной* в точке x_0, если в каком-то базисе S все коэффициенты матрицы A мероморфны в точке x_0.

Упражнение 5. Покажите, что $\mathcal{D}$-модулям соответствуют мероморфные во всех точках (в том числе, на бесконечности!) связности.

Пусть U_1, U_2 — открытые подмножества в $\mathbb{C}$. Если $\mathcal{D}$-модуль U_1-когерентен и U_2-когерентен, то он и $(U_1 \cup U_2)$-когерентен (философски — это следствие определения пучка; на практике — упражнение по коммутативной алгебре в стиле [AM, Mats]). Таким образом, для всякого $\mathcal{D}$-модуля $\mathcal{M}$ существует максимальное открытое подмножество, на котором $\mathcal{M}$ когерентен; обозначим его $\mathrm{Supp}_{coh}(\mathcal{M})$, а соответствующее $\mathcal{M}$ векторное расслоение как $\mathrm{Bun}(\mathcal{M})$.

Упражнение 6. Найдите Supp_{coh} для модулей (1)–(4).

Итак, имеет место диаграмма

$$\mathbb{C}[x,\partial_x]\text{-модуль } M \leftrightarrow \mathcal{D}\text{-модуль } \mathcal{M} \to \begin{array}{c}\text{открытое множество } \mathrm{Supp}_{coh}\mathcal{M} \subset \mathbb{C} \text{ и}\\ \text{векторные расслоения } \mathrm{Bun}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Supp}_{coh}(\mathcal{M})\\ \text{с мероморфными связностями } \nabla\end{array}.$$

Стрелка "$\leftrightarrow$"отвечает паре функторов и задаёт эквивалентность категорий. Стрелке "$\to$"можно также придать смысл функтора. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество.

$$\begin{array}{c}\mathcal{D}\text{-модули } \mathcal{M},\\ \text{для которых } U \subset \mathrm{Supp}_{coh} M\end{array} \to \begin{array}{c}\text{векторные расслоения } \mathrm{Bun}(\mathcal{M})|_U \to U\\ \text{с мероморфными связностями } \nabla\end{array}.$$

Функтор, отвечающий стрелке "$\to$", сюръективен, но не является эквивалентностью категорий: он переводит модули $\mathbb{C}[x,\partial_x]\delta_a$ в ноль, если $a \in \mathbb{C} - U$.

Упражнение 7. Для каких $a \in \mathbb{C}$ выполнено $U \subset \mathrm{Supp}_{coh}(\mathbb{C}[x,\partial_x]\delta_a)$?

Выбор образующих модуля M соответствует выбору порождающих пространства сечений $\mathrm{Bun}(M)$. При этом замена одной системы образующих на другую соответствует <u>мероморфной</u> замене базиса.

Теорема 7. Пусть M_1, M_2 — два $\mathbb{C}[x,\partial_x]$-модуля, не имеющих подфакторов, сосредоточенных в точках. Тогда $M_1 \cong M_2$ если и только если существует $U \subset \mathbb{C}$ такое, что
1) M_1 и M_2 являются U-когерентными и $\mathrm{Bun}(M_1)$ и $\mathrm{Bun}(M_2)$ — локально тривиальны над U;
2) ранги $\mathrm{Bun}(M_1)$ и $\mathrm{Bun}(M_2)$ совпадают и равны r;
3) матрицы связностей ∇_1 и ∇_2 переводятся друг в друга матрицей $F \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathcal{O}(U))$.

Доказательство этой теоремы является сложным теоретическим упражнением, которое может быть разбито на несколько более простых.

Упражнение 8 (Доказательство теоремы 7)**.** Пусть M — это $\mathbb{C}[x,\partial_x]$-модуль, не имеющий подфакторов вида $\mathbb{C}[x,\partial_x]\delta_a$, а $p \in \mathbb{C}[x]$ — произвольный многочлен.
1) Покажите, что ядро и коядро отображения $M \to M[p^{-1}]$ есть прямые суммы $\mathbb{C}[x,\partial_x]\delta_{x_i}$, где x_i — корни многочлена $p(x)$.
2) Покажите, что M изоморфен максимальному по включению подмодулю $M[p^{-1}]$, не имеющему подфакторов вида $\mathbb{C}[x,\partial_x]\delta_a$.
3) Завершите доказательство теоремы 7.

Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $x \in \mathbb{C} - U$ — некоторая точка, $U_x \subset U \cup \{x\}$ — некоторая (аналитическая) окрестность точки x, изоморфная диску, а $U_x^\vee := U_x - x$. Мы фиксируем число r. Пусть $\nabla_r(U)$ $(\nabla_r(U_x^\vee))$ — классы эквивалентности (относительно мероморфных замен координат в слое) связностей тривиального расслоения $U \times \mathbb{C}^r \to U$ (соответственно, $U_x^\vee \times \mathbb{C}^r \to U_x^\vee$). Тогда имеется естественное отображение $\nabla_r(U) \to \nabla_r(U_x^\vee)$.

Упражнение 9. а) Множество $\nabla_r(U)$ отождествляется с множеством матриц $A \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathcal{O}(U))$, отфакторизованному по отношению эквивалентности

$$A \to F^{-1}AF + F^{-1}\partial_x F,$$

где $F \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathcal{O}(U))$ — невырожденная матрица.
б) Множество $\nabla(U_0^\vee)$ отождествляется с множеством матриц $A \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathrm{Mer}(U_0^\vee))$, отфакторизованному по отношению эквивалентности

$$A \to F^{-1}AF + F^{-1}\partial_x F,$$

где $\mathrm{Mer}(U_0^\vee)$ — алгебра комплексно-аналитических функций на $U_0^\vee$, мероморфных в 0, а

$$F \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathrm{Mer}(U_0^\vee))$$

есть невырожденная матрица.

Множество $\mathbb{P}^1 - U$ есть дискретный набор точек; обозначим эти точки $x_1, ..., x_n$. Выберем для каждой из них окрестность U_{x_i} как в предыдущем параграфе. Оказывается, что отображение

$$\nabla_r(U) \to \times_i \nabla_r(U_{x_i}^\vee)$$

биективно. Соответствующая теорема будет сформулирована позднее, но сказанное должно объяснить интерес к множеству $\nabla_r(U_0^\vee)$.

Фиксируем связность ∇ на тривиальном расслоении $U_0^\vee \times \mathbb{C}^r \to U_0^\vee$. Для всякого открытого связного односвязного подмножества $V \subset U_0^\vee$, пространство $\mathrm{Flat}(V)$ сечений s расслоения

$$V \times \mathbb{C}^r \to V,$$

для которых $\nabla s = 0$, имеет размерность r. Соответствие $V \to \mathrm{Flat}(V)$ является пучком и задаёт r-мерную локальную систему. Так как $\pi_1(U_0^\vee) = \mathbb{Z}$, любая локальная система на $U_0^\vee$ задаётся одним невырожденным оператором $\pi(S) \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathbb{C})$, где S — петля вокруг 0.

Упражнение 10. а) Пусть $\Gamma \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathbb{C})$ — невырожденная матрица. Посчитайте $\pi(S)$ для связности, соответствующей $\frac{\Gamma}{x}$.
б) Покажите, что матрицы $\frac{\Gamma_1}{x}$ и $\frac{\Gamma_2}{x}$ задают эквивалентные связности если и только если

$$\exp(2\pi i \Gamma_1) = \exp(2\pi i \Gamma_2),$$

где $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathbb{C})$.

Определение 8. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathrm{Mer}(U_0^\vee))$ — матрица, все коэффициенты которой имеют простые полюса в 0. Расслоение со связностью $\nabla[A] \in \nabla_r(U_0^\vee)$, соответствующей A, называется *регулярным.*

На следующей лекции будет доказана следующая теорема.

Теорема 9. Если $A \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathrm{Mer}(U_0^\vee))$ имеет простые полюса, то существует невырожденная

$$F \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathrm{Mer}(U_0^\vee)),$$

и $\Gamma \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathbb{C})$, для которых

$$F^{-1}AF + F^{-1}\partial_x F = \frac{\Gamma}{x}.$$

То есть в каждом классе эквивалентности матриц, соответствующих регулярным связностям, есть матрица вида $\frac{\Gamma}{x}$, где $\Gamma \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathbb{C})$.

Лекция пыталась отразить материал страниц 25–27 [Mal] и те части введения, к той же книге, что были ещё не охвачены.

Список литературы

[AM] M. Atiyah, I. Macdonald. Introduction to commutative algebra.

[Mats] H. Matsumura, Commutative algebra.

[Eis] D. Eisenbud, Commutative algebra, with a view toward algebraic geometry.

[Mal] B. Malgrange, Equations differentielles a coefficients polynomiaux, стр. 23–25.