Регулярные особенности: продолжение.

Для всякой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathrm{Mer}(U_0^\vee))$ будем обозначать через $A_{(n)}$ её коэффициент при x^n

$$(A_{(n)} \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathbb{C})).$$

Сейчас мы докажем следующую теорему, сформулированную в конце предыдущей лекции.

Теорема 1. Если $A \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathrm{Mer}(U_0^\vee))$ имеет простые полюса, то существует невырожденная

$$F \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathrm{Mer}(U_0^\vee)),$$

и $\Gamma \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathbb{C})$, для которых

$$F^{-1}AF + F^{-1}\partial_x F = \frac{\Gamma}{x}.$$

Для её доказательства нам потребуется следующее утверждение, которое мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Упражнение 1. Пусть A, $B \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathbb{C})$ — две матрицы, наборы собственных значений которых не пересекаются. Тогда отображение

$$\mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathbb{C}) \ (X \to (AX - XB))$$

есть биекция.

Доказательство. Из определения

$$A = \tfrac{\tilde{\Gamma}}{x} + A_{reg},$$

где $A_{reg} \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(U_0)$, а $\tilde{\Gamma} \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathbb{C})$. Обозначим собственные значения матрицы $\tilde{\Gamma}$ как $\lambda_1, ..., \lambda_s$. Покажем, что после преобразования подходящей матрицей $F \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(U_0^\vee)$, мы можем считать, что $\lambda_i - \lambda_j \neq \mathbb{Z}$ при $i \neq j$. Для этого достаточно показать, что мы можем изменить любое одно собственное значение λ_i на 1

Для всякого λ_i матрица $\tilde{\Gamma}$ в некотором базисе записывается как

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{\lambda_i} & 0 \\ 0 & \Gamma'_{\lambda_i} \end{pmatrix},$$

где Γ_{λ_i} — квадратная $d_i \times d_i$-матрица с единственным собственным значением λ_i, а Γ'_{λ_i} — квадратная $(r-d_i)\times(r-d_i)$-матрица, для которой λ_i не является собственным значением. Применим к матрице A матрицу F вида $\begin{pmatrix} x\mathrm{Id}_{d_i} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{r-d_i} \end{pmatrix}$, где Id_{d_i}, Id_{r-d_i} — единичные матрицы соответствующего размера. Результирующая матрица снова имеет простые полюса и её коэффициент при x^{-1} равен

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{\lambda_i} + \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & \Gamma'_{\lambda_i} \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} x^{-1}\mathrm{Id} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix} A_{reg} \begin{pmatrix} x\mathrm{Id} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix} \right)_{(-1)}$$

Так как

$$\left(\begin{pmatrix} x^{-1}\mathrm{Id} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix} A_{reg} \begin{pmatrix} x\mathrm{Id} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix} \right)_{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

наборы собственных значений матриц

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{\lambda_i} + 1 & 0 \\ 0 & \Gamma'_{\lambda_i} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \Gamma_{\lambda_i} + 1 & * \\ 0 & \Gamma'_{\lambda_i} \end{pmatrix}$$

совпадают. Таким образом, наборы собственных значений матриц

$$A_{(-1)} \text{ и } (F^{-1}AF + F^{-1}\partial_x F)_{(-1)}$$

отличаются ровно в одном значении λ_i и на 1.

Таким образом, мы можем считать, что $\lambda_i - \lambda_j \neq \mathbb{Z}$ при $i \neq j$. Покажем в этом предположении, что существует F вида

$$1 + x^1 F_1 + x^2 F_2 + ...,$$

где $F_i \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathbb{C})$, для которого

$$F^{-1}AF + F^{-1}\partial_x F = A_{(-1)} = \frac{\Gamma}{x}.$$

Достаточно показать, что существует набор $\{F_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$, удовлетворяющий системе

$$(F\frac{\Gamma}{x} - AF)_{(n)} = (\partial_x F)_{(n)} \quad (1)$$

для всякого $n \geq -1$. Для $n = -1, 0$ утверждение (1) суть тождество. Для $n \geq 0$ имеем

$$([F,\Gamma])_{(n+1)} - (A_{reg}F)_{(n)} = (n+1)F_{n+1}.$$

Что переписывается как

$$[F_{n+1},\Gamma] - (n+1)F_{n+1} = (A_{reg}F)_{(n)}, \quad F_{n+1}\Gamma - (\Gamma + (n+1)\mathrm{Id}_r)F_{n+1} = (A_{reg}F)_{(n)}. \quad (2)$$

Заметим, что правая часть высчитывается по значениям $F_1, ..., F_n$, и соответственно, достаточно показать, что выражение (2), воспринимаемое, как уравнение относительно F_{n+1}, имеет решение. А это, в силу того, наборы собственных значений матриц Γ и $\Gamma + (n+1)\mathrm{Id}_r$ не пересекаются, следует из упражнения 1. $\square$

То есть в каждом классе эквивалентности матриц, соответствующих регулярным связностям, есть матрица вида $\frac{\Gamma}{x}$, где $\Gamma \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathbb{C})$.

Упражнение 2. Покажите, что в $\mathbb{C}[x,\partial_x]$-модуле M, заданном связностью $\frac{\Gamma}{x}$, $x\partial_x$ действует *локально конечномерно*, т.е. $\dim(\mathbb{C}[x\partial_x]m) < \infty$ для всякого $m \in M$.

Упражнение 3. Покажите, что $\dim(\mathbb{C}[x\partial_x]m) < \infty$ если и только если существует ненулевой многочлен $p(t) \in \mathbb{C}[t]$, для которого $p(x\partial_x)m = 0$.

В следующей лекции мы используем упражнение 2 для описания категории (в частности, её простых объектов) регулярных $(\mathbb{C}\backslash 0)$-когерентных $\mathbb{C}[x,\partial_x]$-модулей.

Упражнение 4. Опишите явно множество $\nabla_1(U_0^\vee)$ и регулярные элементы в нём. Опишите явно соответствующие $\mathbb{C}[x,\partial_x]$-модули.

Список литературы

[Mal] B. Malgrange, Equations differentielles a coefficients polynomiaux, стр. 23–25.