# Регулярные особенности: описание модулей, соответствие Римана-Гильберта.

## 1 Весовые модули: определение и базовые свойства

Сейчас мы введём и опишем в абстрактно алгебраических терминах класс $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модулей, который, как будет показано позже, соответствует классу $(\mathbb{C}\backslash 0)$-когерентных $\mathcal{D}$-модулей с регулярными особенностями в нуле и бесконечности.

**Определение 1.** Действие оператора $A$ на векторном пространстве $M$ называется локально конечномерным, если

$$\forall m \in M \ \dim(\mathbb{C}[A]m) < \infty$$

**Упражнение 1.** Покажите, что $A$ действует на $M$ локально конечномерно, если и только если для всякого $m \in M$ существует конечномерное $A$-инвариантное подпространство $V(m) \subset M$, содержащее $m$.

**Определение 2.** Модуль $M$ алгебры $\mathbb{C}[x, \partial_x]$ называется *слабо весовым*, если $(x\partial_x)$ действует на $M$ локально конечномерно.

Пусть $M$ — слабо весовой модуль. Положим

$$M^\alpha := \{m \in M \mid \exists k \ (x\partial_x - \alpha)^k m = 0\}.$$

**Упражнение 2.** Пусть $M$ — слабо весовой $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуль. Покажите, что $M = \oplus_{\alpha\in\mathbb{C}} M^\alpha$.

Если $M^\alpha \neq 0$, то $\mathrm{e}^{2\pi i\alpha}$ называется *характеристикой* $M$.

**Упражнение 3.** Покажите, что если $M$ конечно порождён, то $M$ имеет конечное число характеристик.

**Определение 3.** Слабо весовой $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуль $M$ называется *весовым*, если $\dim M^\alpha < \infty$ для всякого $\alpha \in \mathbb{C}$.

Заметим, умножение на $x$ переводит пространство $M^\alpha$ в $M^{\alpha+1}$, а умножение на $\partial_x$ переводит пространство $M^\alpha$ в $M^{\alpha-1}$. Пусть $m \in M^\alpha$, $m \neq 0$ и $\partial_x m = 0$. Тогда $x\partial_x m = 0$, и, следовательно, $\alpha = 0$. Аналогично, если $xm = 0$, то $\alpha = -1$. Тогда

$$\begin{cases} \alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} & \forall n \in \mathbb{Z} \ \dim M^\alpha = \dim M^{\alpha+n} \\ \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0} & \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \dim M^\alpha = \dim M^{\alpha+n} \\ \alpha \in \mathbb{Z}_{\leq -1} & \forall n \in \mathbb{Z}_{\leq 0} \ \dim M^\alpha = \dim M^{\alpha+n} \end{cases}.$$

**Следствие 4.** Для всякого весового $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуля $M$ с конечным числом характеристик существует $C_M \in \mathbb{Z}$ такое, что $\dim M^\alpha < C_M$ для всякого $\alpha \in \mathbb{C}$.

**Упражнение 4.** Покажите, что всякий весовой $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуль с конечным числом характеристик конечно порождён (совет: посмотрите упражнение 4 второй леции).

**Теорема 5.** Всякий конечно порождённый $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуль $M$ с локально конечномерным действием $(x\partial_x)$ является весовым.

*Доказательство.* Пусть $R$ — конечномерное порождающее пространство $M$. Без ограничения общности мы считаем его $(x\partial_x)$-инвариантным. Положим

$$M_0 := \mathbb{C}[x]R, M_n := x^n M_0, M_{-n} := \partial_x^n M_0$$

для всякого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Так как $(x\partial_x)$ сохраняет $R$ и $\mathbb{C}[x]$, то $(x\partial_x)M_i \subset M_i$ для всякого $i \in \mathbb{Z}$. Так же

$$xM_i \subset M_{i+1}, \quad \partial_x M_i \subset M_{i-1}.$$

Эти формулы задают действие $x$ и $\partial_x$ на $\mathrm{gr}M := \oplus_{n\in\mathbb{Z}}(M_n/M_{n+1})$, причём $x$ имеет степень 1, а $\partial_x$ имеет степень -1. Действия $x$ и $\partial_x$ задают действие алгебры $\mathbb{C}[x, \partial_x]$ на $\mathrm{gr}M$. Так как $M_0/M_1 = M_0/xM_0$, то $\dim\ (M_0/M_1) < \infty$. Так как

$$M_n/M_{n+1} = \begin{cases} n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} & x^n(M_0/M_1) \\ n \in \mathbb{Z}_{\leq 0} & \partial_x^n(M_0/M_1) \end{cases}, \quad (3)$$

то $\dim(M_n/M_{n+1}) < \infty$ для всякого $n \in \mathbb{Z}$. Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_s$ — собственные значения оператора $(x\partial_x)$ при действии на $M_0/M_1$. Тогда из (3) следует, что собственные значения оператора $(x\partial_x)$ при действии на $M_n/M_{n+1}$ принадлежат множеству $\{\lambda_i + n\}_{i \leq s}$. Откуда следует, что для всякого $\alpha \in \mathbb{Z}$

$$(\mathrm{gr}M)^\alpha \cap (M_n/M_{n+1}) \neq 0$$

только для конечного числа $n \in \mathbb{Z}$. Откуда $\dim\,(\mathrm{gr}M)^\alpha < \infty$ для всякого $\alpha$. Так как $\dim M^\alpha = \dim(\mathrm{gr}M^\alpha)$ для всякого $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуль $M$ является весовым. $\square$

Пусть $V$ — векторное пространство и $A : V \to V$ — линейный оператор на нём. Обозначим как $\mathrm{Zuck}_A V$ множество векторов, на которых $A$ действует локально конечномерно.

**Упражнение 5.** Пусть $M$ — произвольный $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуль, покажите, что $\mathrm{Zuck}_{(x\partial_x)}M$ также является $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модулем.

Пусть $x_0 \in \mathbb{C}$ — произвольная точка, а $M$ — произвольный $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуль. По определению

$$\mathrm{Reg}_{x_0}M := \mathrm{Zuck}_{((x-x_0)\partial_x)}(M \otimes_{\mathbb{C}[x]} \mathbb{C}[x - x_0]]),$$

где $\mathbb{C}[x - x_0]]$ — ряды Лорана в точке $x_0$. Если $M$ — конечно порождён, то $\mathrm{Reg}_{x_0}M$ также конечно порождён. Если $x_0$ — гладкая точка конечно порождённого $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуля $M$, то

$$\mathrm{Reg}_{x_0}M := \mathbb{C}[x] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^r,$$

где $r$ — ранг векторного расслоения, соответствующего $M$. Если соответствующая $M$ связность регулярна в $x_0$, то

$$M \otimes_{\mathbb{C}[x]} \mathbb{C}[x - x_0]] = \mathrm{Reg}_{x_0}M \otimes_{\mathbb{C}[x]} \mathbb{C}[x - x_0]].$$

Так как $\mathbb{C}[x - x_0, \partial_x] \cong \mathbb{C}[x, \partial_x]$, то каждому конечно порождённому $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модулю $M$ и каждой точке $x_0 \in \mathbb{C}$ мы сопоставили весовой $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуль. Это сопоставление является функтором, который мы также будем обозначать $\mathrm{Reg}_{x_0}$. Оказывается, что функторы $\mathrm{Reg}_{x_0}$ играют ключевую роль в описании голономных $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модулей, а описание категории конечно порождённых $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модулей сводится к описанию категории конечно порождённых весовых модулей.

# 2 Описание категории конечно порождённых весовых модулей

Положим

$$P^- := \{z \in \mathbb{C} \mid -1 \leq \mathrm{Re}z < 0\}, \quad P^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Re}z < 1\}.$$

Для всякой характеристики $\lambda \in \mathbb{C}^* := (\mathbb{C}\backslash 0)$ существует и единственный элемент $z \in P^-$, для которого $\mathrm{e}^{2\pi i z} = \lambda$. Аналогично, для всякой характеристики $\lambda \in \mathbb{C}^*$ существует и единственный элемент $z \in P^+$, для которого $\mathrm{e}^{2\pi i z} = \lambda$. Так же
$-$) для всякого $n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ и всякого $z \in P^-$, имеем $\dim M^\alpha = \dim M^{\alpha+n}$;
$+$) для всякого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и всякого $z \in P^+$, имеем $\dim M^\alpha = \dim M^{\alpha+n}$.
Положим

$$E := \oplus_{\alpha \in P^-} M_\alpha \text{ и } F := \oplus_{\alpha \in P^+} M_\alpha.$$

Тогда умножение на $x$ задаёт отображением $u : E \to F$, а умножение на $\partial_x$ задаёт отображение $v : F \to E$. Из определения, собственные значения $uv$ принадлежат $P^+$.

**Упражнение 6.** Пусть $E, F$ — конечномерные векторные пространства, а $u' : E \to F$, $v' : E \to F$ — произвольные линейные отображения. Тогда наборы (с кратностями) собственных значений $u'v'$ и $v'u'$ совпадают.

**Упражнение 7.** Покажите, что отображение Qui: $M \mapsto [E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F]$ есть функтор.

Пусть $E, F$ — пара конечномерных векторных пространств, а $u : E \to F$, $v : F \to E$ — пара отображений, для которых собственные значения $uv$ при действии на $F$ принадлежат $P^+$. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}[\partial_x] \otimes_{\mathbb{C}} E \oplus \mathbb{C}[x] \otimes_{\mathbb{C}} F$ и зададим на нём действие $\mathbb{C}[x, \partial_x]$ правилами

| — | правило Лейбница | $E \underset{\partial_x}{\overset{x}{\rightleftarrows}} F$ |
|---|---|---|
| $x \cdot (x^n \otimes f) := x^{n+1} \otimes f$ | $\partial x \cdot (x^{n+1} \otimes f) := (n+1)x^n \otimes f + x^n \otimes (uvf)$ | $\partial_x f := vf$ |
| $\partial_x \cdot (\partial_x^n \otimes e) := \partial_x^{n+1} \otimes e$ | $x \cdot (\partial_x^{n+1} \otimes e) := -(n+1)\partial_x^n \otimes e + \partial_x^n \otimes (vue)$ | $xe := ue$ |

.

Итак, мы определили отображение RMod: $[E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F] \mapsto M$.

**Упражнение 8.** Покажите, что функторы Qui, RMod задают эквивалентность категории

весовых $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модулей с конечным числом характеристик
и
наборов $E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F$, для которых собственные значения $uv$ лежат в $P^+$.

Отметим, что $\mathbb{C}[x, \partial_x]\delta_0$ является весовым модулем.

**Упражнение 9.** Опишите все простые объекты категорий, упомянутых в предыдущем упражнении. Как устроено соответствие между ними?

Пару отображений $E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F$ можно заменить на пару $E \underset{var}{\overset{can}{\rightleftarrows}} F$, где

$$can := u, var := v\xi(uv),\ \xi(t) := \tfrac{\mathrm{e}^{-2\pi i t} - 1}{t}.$$

**Упражнение 10.** Покажите, что эквивалентны категории

наборов $E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F$, для которых собственные значения $uv$ лежат в $P^+$
и
наборов $E \underset{var}{\overset{can}{\rightleftarrows}} F$, для которых оператор $1 + can \circ var$ невырожден.

Пространствам $E, F$, отображениям $can, var$ может быть придан простой смысл в терминах локальной системы, соответствующей $M$ (смотри [Mal, стр. 30–33]). В частности, $F$ — слой соответствующего $M$ расслоения над $\mathbb{C}\backslash 0$, а

$$1 + var \circ can = \mathrm{e}^{2\pi i uv} \text{ — оператор монодромии в } F,$$

определяемый обходом вокруг точки 0.

Пусть $M$ — конечно порождённый весовой $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуль, а $[E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F]$ — соответствующий ему набор данных.

**Упражнение 11.** 1) Если оператор $vu$ не имеет нулевого собственного значения в $E$, то $M$ не имеет подфакторов, изоморфных $\mathbb{C}[x, \partial_x]\delta_0$.
2) Категория наборов $(E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F)$, для которых $vu|_E$ не имеет нулевых собственных значений, эквивалентна категории операторов $(F \xrightarrow{\Gamma} F)$ на векторном пространстве.
3) Объясните связь между классификацией регулярных связностей на $U_0^\vee$, полученной на прошлой лекции, и классификацией весовых модулей.

# 3 Соответствие Римана-Гильберта для кривых

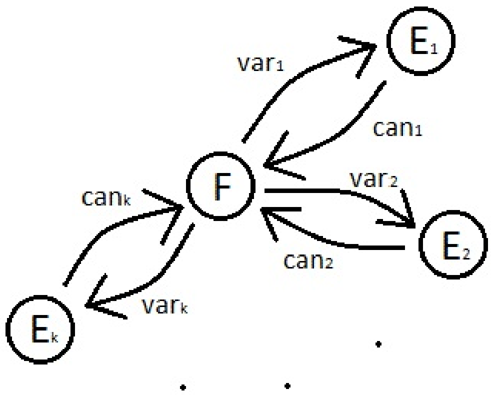
Пусть $X$ — гладкая алгебраическая кривая (как пример, $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}^1$). Тогда существует и единственная с точностью до изоморфизма гладкая компактная алгебраическая кривая $\hat{X}$, в которой $X$ является открытым подмножеством. Пусть $B \to X$ — тривиальное $r$-ое расслоение и $\nabla$ — связность в $B$.

**Определение 6.** а) Пара $(\nabla, B)$ называется *регулярной*, если для всякой точки $x \in X\backslash\hat{X}$ она регулярна в какой-то проколотой окрестности $U_x^\vee$ точки $x$.
б) [эквивалентное] Пара $(\nabla, B)$ называется *регулярной*, если для всякой точки $x \in X\backslash\hat{X}$ она регулярна в формальной окрестности точки $x$.

**Определение 7.** Голономный $\mathbb{C}[x, \partial_x]$ модуль называется *модулем с регулярными особенностями*, если соответствующая ему пара $(\nabla, \mathrm{Bun}(M))$ (см. лекцию 3) имеет регулярные особенности.

Фиксируем конечное подмножество $S \subset \mathbb{C}$; через $s_1, ..., s_k$ обозначим элементы $S$.

**Теорема 8.** Категория конечно порождённых $\mathbb{C}\backslash S$-когерентных $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модулей с регулярными особенностями эквивалентна категории наборов $(E_1 \underset{var_1}{\overset{can_1}{\rightleftarrows}}, E_2 \underset{var_2}{\overset{can_2}{\rightleftarrows}}, ..., E_k \underset{var_k}{\overset{can_k}{\rightleftarrows}}; F)$, организованных как показано на рисунке




,

и для которых операторы $1 + can_k \circ var_k$ невырождены для всякого $k$.

Доказательство этой теоремы на лекциях представлено не было. Нечто напоминающее доказательство написано в [Mal, стр. 26, утверждение 1.5]. Вообще говоря предыдущая теорема следует из фундаментальной работы М. Касивары, посвящённой соответствию Римана-Гильберта [Ka].

Мы покажем, как устроено отображения из множества модулей в множество наборов

$$(E_1 \underset{var_1}{\overset{can_1}{\rightleftarrows}}, E_2 \underset{var_2}{\overset{can_2}{\rightleftarrows}}, ..., E_k \underset{var_k}{\overset{can_k}{\rightleftarrows}}; F).$$

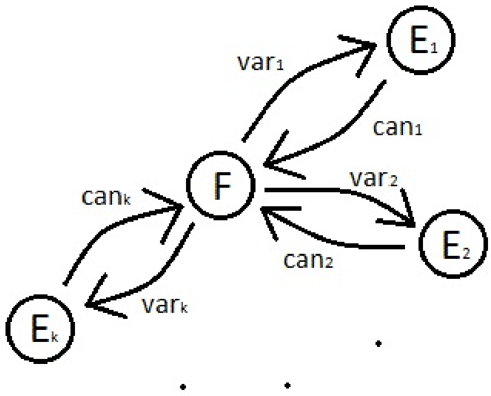
Для всякой точки $s_i$ определён конечно порождённый весовой $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуль $\mathrm{Reg}_{s_i} M$, а ему соответствует набор $\mathrm{Qui}(\mathrm{Reg}_{s_i} M) = (E_i \underset{var_i}{\overset{can_i}{\rightleftarrows}} F_i)$. Все пространства $F_i$ изоморфны слою соответствующего $M$ расслоения над $\mathbb{C}\backslash S$. Что и позволяет построить искомую диаграмму.

Напомним, что $X$ — гладкая алгебраическая кривая. Обозначим через $\mathcal{D}_X$ пучок дифференциальных операторов на $X$ ($U \mapsto \mathcal{D}(U)$, см. также лекцию 3).

**Определение 9.** Пучок $\mathcal{D}_X$-модулей $\mathcal{M}$ называется *голономным*, если $\mathcal{M}(U)$ есть голономный $\mathcal{D}(U)$-модуль для всякого открытого аффинного подмножества $U \subset X$ (отметим, что в $X$ почти все открытые подмножества — аффинны).

Пусть $S \subset \mathbb{P}^1$ — конечное подмножество, а $s_1, ..., s_k$ — его элементы. Другая полезная интересная (и для кривой более правильная) формулировка соответствия Римана-Гильберта приведена ниже.

**Теорема 10.** Категория конечно порождённых $\mathbb{P}^1\backslash S$-когерентных $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-модулей с регулярными особенностями эквивалентна категории наборов $(E_1 \underset{var_1}{\overset{can_1}{\rightleftarrows}}, E_2 \underset{var_2}{\overset{can_2}{\rightleftarrows}}, ..., E_k \underset{var_k}{\overset{can_k}{\rightleftarrows}}; F)$, организованных как показано на рисунке




,

и для которых

$$(1 + can_1 \circ var_1)(1 + can_2 \circ var_2)...(1 + can_k \circ var_k) = \mathrm{Id}_F.$$

В случае общей алгебраической кривой $X$ к набору

$$(E_1 \overset{can_1}{\underset{var_1}{\rightleftarrows}}, E_2 \overset{can_2}{\underset{var_2}{\rightleftarrows}}, ..., E_k \overset{can_k}{\underset{var_k}{\rightleftarrows}}; F)$$

нужно приписать невырожденные операторы $F \xrightarrow{l_i} F$, соответствующие образующим $\{l_i\}_i$ фундаментальной группы $\pi_1(X)$ и наложить на них соотношения, имеющиеся в $\pi_1(X)$.

**Замечание 11.** Буква $F$ — первая в слове Fiber, буква É — первая буква слова évanescent, Qui — сокращение от quiver, RMod — от regular module, Zuck — от Gregg Zuckerman.

## Список литературы

[Mal] B. Malgrange, Equations differentielles a coefficients polynomiaux.

[Ka] Masaki Kashiwara, The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20**(1984), 319–365.