Диаграмма ньютона. Основная теорема алгебры в дифференциальных операторах.

Обозначим через $\mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}})$ множество выражений вида

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}_{\geq n}} a_{(\frac{i}{d})}x^{(\frac{i}{d})},$$

где $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ — произвольное число. Это множество наделяется естественной структурой $\mathbb{C}$-алгебры и является относительно него полем.

Упражнение 1. Покажите, что алгебраическое замыкание $\mathbb{C}[x)$ изоморфно $\mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}})$ (см. википедию).

Положим $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}}) := \mathbb{C}[\partial_x, x] \otimes_{\mathbb{C}[x]} \mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}}), \mathbb{C}[\partial_x, x) := \mathbb{C}[\partial_x, x] \otimes_{\mathbb{C}[x]} \mathbb{C}[x)$.

Заметим, что для всякого $a \in \mathbb{C}[\partial_x, x)$ существуют
1) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, для которого $j \leq n$ для всякой пары $(i,j) \in$N(a);
2) $r \in \mathbb{Z}$, для которого $i \geq r$ для всякой пары $(i,j) \in$N(a).
Следующая теорема есть версия основной теоремы алгебры для дифференциальных операторов одной переменной.

Теорема 1. Пусть $a \in \mathbb{C}[\partial_x, x)$. Тогда

$$a = f(\partial_x - \alpha_1)(\partial_x - \alpha_2)...(\partial_x - \alpha_n),$$

где $f \in \mathbb{C}[x)$, n — степень a, $\alpha_i \in \mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$ для всякого i.

Нам потребуется следующее определение, представляющее также и самостоятельный интерес.

Определение 2. *Преддиаграммой ньютона* $\tilde{\mathrm{N}}(a)$ оператора $a := \sum_{i,j} a_{ij}x^i\partial_x^j$ называется выпуклая оболочка в $\mathbb{Q}^2$ множества $\{(i,j)\}_{a_{i,j}\neq 0}$. Множество

$$\mathrm{N}(a) := \{(i,j) \in \mathbb{Q}^2 \mid \exists k \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, j' \in \mathbb{Q}, \text{ для которых } (i+r, j') \in \tilde{\mathrm{N}}(a) \text{ и } j' \leq j+r\} \subset \mathbb{Q}^2$$

называется *диаграммой ньютона* оператора a.

Упражнение 2. Покажите, что $\mathrm{N}(ab) = \mathrm{N}(a) + \mathrm{N}(b)$ (сумма минковского) для всяких $a, b \in \mathbb{C}[x, \partial_x]$.

Пусть $t_1, ..., t_s$ — тангенсы углов наклона касательных направлений к конечным граням $\mathrm{N}(a)$, упорядоченные по возрастанию. Набор чисел $t_1 - 1, ..., t_s - 1$ назовём *параметрами излома* $\mathrm{N}(a)$ и обозначим $\mathrm{t}(a)$.

Упражнение 3. Покажите, что $\mathrm{t}_i(a) \geq 0$ для любого i и для любого $a \in \mathbb{C}[x, \partial_x]$.

Аналогично определяется $\mathrm{N}(a)$ и $\mathrm{t}(a)$ для дифференциальных операторов a с коэффициентами в рядах Лорана $\mathbb{C}[x)$ и в рядах Пюизо $\mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}})$ (им. Victor'a Puiseux).

Упражнение 4. Покажите, что $\mathrm{t}(ab) = \mathrm{t}(a) \cup \mathrm{t}(b)$ для всяких $a, b \in \mathbb{C}[x, \partial_x]$.

В доказательстве теоремы 1 ключевую роль играют предложения 3 и 4, сформулированные ниже; им посвящён остаток лекции.

Предложение 3. Для всякого дифференциального оператора $a \in \mathbb{C}[\partial_x, x)$ существует набор $a_1, ..., a_s \in \mathbb{C}[x, \partial_x]$, для которого $a = a_1...a_s$ и
1) $\mathrm{t}(a) = \cup_i \mathrm{t}(a_i)$ (см. упражнение 4);
2) $\mathrm{t}(a_i)$ состоит из одного элемента для всякого i;
3) $\mathrm{t}(a_i) < \mathrm{t}(a_j)$, если $i < j$.

Всякий элемент $\omega \in \mathbb{C}[\partial_x, x]$ (соответственно, $\mathbb{C}[\partial_x, x), \mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$) определяет непрерывный автоморфизм ϕ_ω алгебры $\mathbb{C}[x, \partial_x]$ (соответственно, $\mathbb{C}[\partial_x, x), \mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$), заданный формулами

$$\phi_\omega(x) := x, \quad \phi_\omega(\partial_x) := \partial_x + \omega$$

(топология $\mathbb{C}[\partial_x, x)$ и $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$ индуцирована с топологии на $\mathbb{C}[x)$ и $\mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}})$ соответственно).

Предложение 4. Пусть $a \in \mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$ таков, что $\mathrm{t}(a)$ состоит из одной точки. Тогда существует $\mu \in \mathbb{C}$, для которого $\mathrm{t}(\phi_{\frac{\mu}{x^{\mathrm{t}(a)+1}}} a)$ состоит по крайней мере из двух точек.

Упражнение 5. Докажите предложение 4. Выведите из предложения 3 и предложения 4 теорему 1.

Фиксируем $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ и положим

$$\nu(t,a) := \min_{a_{ij} \neq 0} (i - (t+1)j)$$

для всякого $a \in \mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$.

Упражнение 6. Покажите, как по функции $\nu(\cdot, a) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}(t \to \omega(t,a))$ восстановить диаграмму ньютона $\mathrm{N}(a)$. Покажите, как по диаграмме ньютона $\mathrm{N}(a)$ построить функцию $\nu(\cdot, a)$.

Упражнение 7. Покажите, что а) $\nu(t, ab) = \nu(t,a) + \nu(t,b)$; б) $\nu(t, a+b) \geq \min(\nu(t,a), \nu(t,b))$ для всяких $a, b \in \mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$ и $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Лемма 5. Пусть a — дифференциальный оператор с параметрами излома $0 \leq t_1 < ... < t_s (s \geq 2)$. Тогда для любого $k < s$ существует и единственный набор $b, c \in \mathbb{C}[\partial_x, x)$, для которого $a = bc$ и
1) $\mathrm{t}(b) = \{t_1, ..., t_k\}$, $\mathrm{t}(c) = \{t_{k+1}, ..., t_s\}$;
2) $c_{00} = 1$, $c_{j0} = 0$ (коэффициент при x^j) для $j \neq 0$.

Доказательство. Фиксируем иррациональное число t', для которого $t_k < t' < t_{k+1}$. Положим

$$\nu_{t'}(i,j) := (i - (t'+1)j)$$

для всех $i, j \in \mathbb{R}$. Обозначим через i_0, j_0 элементы $\mathbb{Z}$, для которых $\nu_{t'}(i_0, j_0) = \nu(t', a)$ и $a_{i_0 j_0} \neq 0$. Тогда коэффициенты b_{ij}, c_{ij} вычисляются по следующим рекурентным формулам.

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{\substack{\nu_{t'}(i_b, j_b) < \nu_{t'}(i,j) \\ \nu_{t'}(i_c, j_c) + \nu(t',a) < \nu_{t'}(i,j)}} (b_{i_b j_b} c_{i_c j_c})_{ij},$$

$$c_{ij} = (a_{i+i_0, j+j_0} - \sum_{\substack{\nu_{t'}(i_b, j_b) < \nu_{t'}(i,j) + \nu(t',a) \\ \nu_{t'}(i_c, j_c) < \nu_{t'}(i,j)}} (b_{i_b j_b} c_{i_c j_c})_{i+i_0, j+j_0}) \ (j > 1).$$

Проверку того, что $a = bc$ для b и c заданных таким образом, оставляю читателю. □

Список литературы

[Mal] B. Malgrange, Equations differentielles a coefficients polynomiaux.

[Ka] Masaki Kashiwara, The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20**(1984), 319–365.