Локальная классификация Д-модулей. Расширенное соответствие Римана-Гильберта.

1 Локальная классификация.

Пусть M — конечнопорождённый $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$-модуль, $\alpha \in \mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}})$. Положим $L_\alpha := \mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})/(\cdot(\partial_x - \alpha))$. Определим автоморфизм ϕ_α на $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$ формулами

$$\phi_\alpha(x) = x, \quad \phi_\alpha(\partial_x) = \partial_x + \alpha.$$

Упражнение 1. Покажите, что $\phi_\alpha(M) := M \otimes_{\mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}})} L_\alpha$.

Пусть $\alpha = \sum_i \alpha_i x^i$. Положим $\Omega(x) := \{\alpha \in \mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}}) \mid \alpha_i = 0\ \forall i \geq -1\}$. Перейдём теперь к локальной классификации Д-модулей.

Теорема 1. Пусть M — $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$-модуль, конечномерный как $\mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}})$-модуль. Тогда он представим единственным образом в виде $\oplus_{\alpha \in \Omega(x)}(L_\alpha \otimes_{\mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}})} M_\alpha) := \oplus_{\alpha\in\Omega(x)}(\phi_\alpha M_\alpha)$, где M_α — $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$-модуль с регулярными особенностями для всякого $\alpha \in \Omega(x)$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется несколько вспомогательных утверждений, большая часть которых принадлежит абстрактной алгебре.

Пусть R — некоторое кольцо, $\mathcal{C}$ — полная подкатегория категории R-модулей, в которой все объекты имеют конечную длину.

Упражнение 2. Пусть $M_1, M_2 \in$Ob$(\mathcal{C})$[1] и $\mathrm{Ext}^i(\tilde{M}_1, \tilde{M}_2) = 0$ для любых двух подфакторов[2] $\tilde{M}_1$ модуля M_1 и $\tilde{M}_2$ модуля M_2 и любого $i \geq 0$. Тогда $\mathrm{Ext}^i_R(M_1, M_2) = 0$ для любого $i \geq 0$.

Пусть SOb$(\mathcal{C})$ — простые объекты категории $\mathcal{C}$. Пусть SOb$(\mathcal{C})$ разбивается на несколько классов $\{\mathrm{SOb}(\mathcal{C})_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ так, что

$$\mathrm{Ext}^i_R(M_\alpha, M_\beta) = 0, \text{ если } \alpha, \beta \in \Omega, i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \alpha \neq \beta,\ M_\alpha \in \mathrm{SOb}(\mathcal{C})_\alpha,\ M_\beta \in \mathrm{SOb}(\mathcal{C})_\beta.$$

Упражнение 3. Покажите, что всякий объект $M \in$Ob$(\mathcal{C})$ изоморфен $\oplus_{\alpha\in\Omega} M_\alpha$, где все подфакторы M_α принадлежат SOb$(\mathcal{C})_\alpha$.

Напомним, что левый R-модуль M называется циклическим, если $M \cong R/I$ для некоторого левого идеала I.

Упражнение 4. Пусть M_1, M_2 — два циклических модуля. Тогда $\mathrm{Ext}^i_R(M_1, M_2) = 0$ для $i \geq 2$.

Положим $R/b := R/(Rb)$.

Упражнение 5. а) Покажите, что $\mathrm{Hom}_R(R/b, R/c) = \{m \in R/c \mid bm = 0\}$ и что

$$\mathrm{Hom}_R(R/b, R/c) = 0 \text{ если и только если } ((bc' = b'c) \to (c' = rc, b' = br)).$$

б) Покажите, что $\mathrm{Ext}^1_R(R/b, R/c) = (R/c)/(b(R/c))$.

Положим $b\backslash R := R/(bR)$.

Упражнение 6. Покажите, что

$$\mathrm{Hom}_R(R/c, R/b) \cong \mathrm{Hom}_R(b\backslash R, c\backslash R), \quad \mathrm{Ext}^1_R(R/c, R/b) \cong \mathrm{Ext}^1_R(b\backslash R, c\backslash R)$$

Назовём главной частью $\alpha = \sum_{i\in\mathbb{Q}} \alpha_i x^i$ ряд $\sum_{i\in\mathbb{Q}_{\leq -1}} \alpha_i x^i$. Здесь и далее $R := \mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$. Заметим, что R — кольцо главных идеалов.

Упражнение 7. а) Пусть $\alpha \in \mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}})$ и главная часть $\alpha \neq 0$. Покажите, что

$$\mathrm{Ext}^i_R(R/(\partial_x - \alpha), R/\partial_x) = 0 \text{ для любого } i \geq 0.$$

[1] Ob$(\mathcal{C})$ — объекты $\mathcal{C}$.

[2] подфактор — фактор подмодуля

б) Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}})$ и главные части α и β различны. Покажите, что

$$\mathrm{Ext}^i_R(R/(\partial_x - \alpha), R/(\partial_x - \beta)) = 0$$

для любого $i \geq 0$.

Пусть $\mathcal{C}$ — категория $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$-модулей, которые конечномерны как $\mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}})$-модули. Категория $\mathcal{C}$ полна в категории R-модулей, а все объекты $\mathcal{C}$ — артиновы, и, как следствие, цикличны и имеют конечную длину.

Упражнение 8. а) Покажите, что простые объекты категории $\mathcal{C}$ изоморфны $R/(\partial_x - \alpha)$ для $\alpha \in \mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}})$.
б) Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}})$ таковы, что $R/(\partial_x - \alpha) \cong R/(\partial_x - \beta)$. Покажите, что главные части α и β совпадают.

Упражнение 8 позволяет определить главную часть простого модуля категории $\mathcal{C}$. Назовём главными частями произвольного модуля категории $\mathcal{C}$ главные части его простых подфакторов. Назовём объект категории $\mathcal{C}$ *однородным*, если он обладает единственной главной частью.

Упражнение 9. а) Покажите, что всякий $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$-модуль категории $\mathcal{C}$ есть прямая сумма однородных $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$-модулей с попарно различными главными частями.
б) Пусть M — однородный $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$-модуль с главной частью α. Покажите, что $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$-модуль $\phi_{-\alpha}(M)$ — регулярен.
в) Завершите доказательство теоремы 1.

2 Расширенное соответствие Римана-Гильберта.

Напомним, что всякому весовому $\mathbb{C}[\partial_x, x]$-модулю M соответствует набор $\mathrm{Qui}(M) := [E \underset{var}{\overset{can}{\rightleftarrows}} F]$ (см. лекцию от 11.03.2012). Имеется взаимнооднозначное соответствие между $\mathbb{C}[x, \partial_x^{\mathbb{Q}})$-модулями с регулярными особенностями и весовыми $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модулями, не имеющими подфакторов, изоморфных $\mathbb{C}[x, \partial_x]\delta_0$ [Mal, §2.1]. Таким образом, каждому $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$-модулю M_α с регулярными особенностями соответствует представление $\mathrm{Qui}(M_\alpha) := [E_\alpha \underset{var_\alpha}{\overset{can_\alpha}{\rightleftarrows}} F_\alpha]$, где отображение can_α не имеет ядра и $1 + can_\alpha \circ var_\alpha$ — невырожденный оператор на F_α.

Модулю $M := \oplus_\alpha M_\alpha$ алгебры $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$ мы сопоставим набор пространств

$$(F := \oplus_{\alpha \in \Omega(x)} F_\alpha, \{E_1, ..., E_\alpha\}_{\alpha \in \Omega(x)})$$

с набором отображений $var_\alpha : F \to F_\alpha \to E_\alpha$, $can_\alpha : E_\alpha \to F_\alpha \to F$, $\alpha \in \Omega(x)$. Положим

$$var \circ can := \oplus_\alpha var_\alpha \circ can_\alpha.$$

Тогда
1) оператор can_α не имеет ядра для любого $\alpha \in \Omega(x)$,
2) оператор $1 + can \circ var \in \mathrm{End}(F)$ невырожден,
3) $(can_\alpha \circ var_\alpha) \circ (can_\beta \circ var_\beta) = 0$, если $\alpha \neq \beta$.

Назовём *рангом* $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$-модуля M_α его размерность как $\mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}})$-векторного пространства. Ранг M совпадает с размерностью F в наборе $\mathrm{Qui}(M_\alpha)$. Каждому голономному $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^1}$-модулю M можно сопоставить
1) набор его особых точек $P \subset \mathbb{P}^1$,
2) набор $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$-модулей $\{\mathrm{Loc}_p M\}_{p \in P}$, имеющих одинаковый ранг,
3) набор $\Omega(x)_p$ главных частей $\mathrm{Loc}_p M$ (с кратностями) для каждого $p \in P$.

Модулям $\{\mathrm{Loc}_p M\}_{p \in P}$ также соответствуют наборы $\{E_{\alpha,p}, can_{\alpha,p}, var_{\alpha,p}\}_{p \in P, \alpha \in \Omega(x)_p}$ (здесь $can_{\alpha,p}, var_{\alpha,p}$ рассматриваются как отображения из/в одно и тоже пространство F, отождествляемое со слоем M в общей точке). При правильном отождествлении F в точках $p \in P$, имеем равенство

$$\circ_{p \in P}(1 + can \circ var)_p = \mathrm{Id}_F.$$

Обратим внимание на то, что выражение $\circ_{p \in P}(1 + can \circ var)_{p \in P}$ существенно зависит от порядка сомножителей. Таким образом, мы неявно вводим порядок на точках $p \in P$, что соответствует выбору различных систем образующих в $\pi_1(\mathbb{P}^1 - P)$.

Теорема 2 (Расширенное соответствие Римана-Гильберта [Mal, §4])**.** Пусть P — конечный набор точек. Описанное выше отображение из категории $\mathcal{D}(\mathbb{P}^1)$-модулей, с особенностями в точках P, и фиксированным набором главных частей $\Omega(x)_p$ для $p \in P$, в категорию пространств $(F, \{E_{\alpha,p}\}_{p\in P, \alpha\in\Omega(x)_p})$ с отображениями $\{E_{\alpha,p} \underset{var_{\alpha,p}}{\overset{can_{\alpha,p}}{\rightleftarrows}} F\}_{p\in P,\alpha\in\Omega(x)_p}$, удовлетворяющими условиям:
1) оператор $can_{\alpha,p}$ не имеет ядра для любого $p \in P$ и $\alpha \in \Omega(x)_p$,
2) оператор $1 + \oplus_\alpha (can \circ var)_p \in$End$(F)$ невырожден для всякого $p \in P$,
3) $(can_{\alpha,p} \circ var_{\alpha,p}) \circ (can_{\beta,p} \circ var_{\beta,p}) = 0$, для всякого $p \in P$, $\alpha, \beta \in \Omega(x)_p$, $\alpha \neq \beta$,
4) $\circ_{p\in P}(1 + can \circ var)_{p\in P} =Id_F$,
является эквивалентностью категорий.

Список литературы

[Mal] B. Malgrange, Equations differentielles a coefficients polynomiaux.