# Вопросы к зачёту.

## 1 Задачи

В этом разделе $D := \mathbb{C}[x, \partial_x]$.

**Задача 1.** Приведите пример левого идеала в $D$, не являющегося главным.

**Задача 2.** Покажите, что $\mathrm{SSupp}^B M$ может совпадать с любой прямой, проходящей через 0.

**Задача 3.** Покажите, что длина голономного модуля не превосходит $|\mathrm{V}(M)|$.

**Задача 4.** Пусть на $D$-модуле $M$ задана фильтрация $\{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ такая, что
1) $B_n M_i \subset M_{i+n}$ для всяких $i, n$,
2) для каких-то $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и всякого $n \geq 0$ верно, что $\dim M_n \leq c_1 n + c_2$.
Покажите, что тогда модуль $M$ конечнопорождён, голономен и $|\mathrm{V}(M)| \leq c_1$.

**Задача 5.** а) Пусть $p \in \mathbb{C}[x]$ — многочлен. Постройте фильтрацию со свойствами, указанными в задаче 4 для $D$-модуля $\mathbb{C}[x, \frac{1}{p}]$.
б) Наделите $\mathbb{C}(\lambda)[x, \frac{1}{p}]p^\lambda$ структурой $\mathbb{C}(\lambda)[x, \partial_x]$-модуля. Укажите для этого модуля $\mathbb{C}(\lambda)$-фильтрацию со свойствами, указанными в упражнении 4.
в) Покажите, что для всякого многочлена $p(x)$ существует дифференциальный оператор $D(x, \lambda)$, с полиномиальными по $\lambda$ и $x$ коэффициентами, и приведённый многочлен $b(\lambda)$, для которых

$$D(x, \lambda)p^\lambda = b(\lambda)p^{\lambda - 1}.$$

Такой многочлен $b(\lambda)$ наименьшей степени называется *полиномом Бернштейна* многочлена $p(x)$.
г) Найдите полином Бернштейна для $p(x) = x, x^2, x^2 - 1$.

Пусть $p \in \mathbb{C}[x]$ — многочлен, а $M$ — произвольный голономный $D$-модуль $M$ с порождающим пространством $M_0$. Локализацией $D$-модуля $M$ по $(p)$ называется

$$M[\tfrac{1}{p}] := M \otimes_{\mathbb{C}[x]} \mathbb{C}[x, \tfrac{1}{p}].$$

Это пространство автоматически наделено структурой $\mathbb{C}[x]$-модуля. Структура $D$-модуля доопределяется действием $\partial_x$ :

$$\partial_x(m \otimes f) = (\partial_x m) \otimes f + m \otimes (\partial_x f).$$

**Задача 6.** а) Проверьте, что это действие корректно, в частности, что $[x, \partial_x] = 1$ при действии на $M[\frac{1}{p}]$.
б) Проверьте, используя упражнение 4, что $M[\frac{1}{p}]$ — голономный $D$-модуль.

**Задача 7.** Пусть $M$ — голономный $\mathbb{C}[x, \frac{1}{x}, \partial_x]$—модуль. Покажите, что $M$ голономен и как $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуль.

**Задача 8.** Найдите $\mathrm{Supp}_{\mathrm{coh}} M$, где $M = D/(Df)$ и $f = (x+1)\partial_x^2 + (x^2+1)\partial_x + (x^3+1)$.

**Задача 9.** Пусть $M$ — некоторый весовой модуль, а $(E \underset{var}{\overset{can}{\rightleftarrows}} F)$ — соответствующий ему набор векторных пространств и отображений. Покажите, что если оператор $vu$ не имеет нулевого собственного значения в $E$, то $M$ не имеет подфакторов, изоморфных $\mathbb{C}[x, \partial_x]\delta_0$.

**Задача 10.** Постройте по паре операторов $can := \langle \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \rangle, var := \langle \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \rangle$ весовой модуль.

Пусть $R$ — некоторое кольцо, $\mathcal{C}$ — полная подкатегория категории $R$-модулей, в которой все объекты имеют конечную длину.

**Задача 11.** Пусть $M_1, M_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$[1] и $\mathrm{Ext}^i(\tilde{M}_1, \tilde{M}_2) = 0$ для любых двух подфакторов[2] $\tilde{M}_1$ модуля $M_1$, $\tilde{M}_2$ модуля $M_2$ и любого $i \geq 0$. Тогда $\mathrm{Ext}^i_R(M_1, M_2) = 0$ для любого $i \geq 0$.

[1] $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ — объекты $\mathcal{C}$.
[2] подфактор — фактор подмодуля

Пусть $\mathrm{SOb}(\mathcal{C})$ — простые объекты категории $\mathcal{C}$. Пусть $\mathrm{SOb}(\mathcal{C})$ разбивается на несколько классов $\{\mathrm{SOb}(\mathcal{C})_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$, для которых

$$\mathrm{Ext}^i_R(M_\alpha, M_\beta) = 0, \text{ если } \alpha,\beta\in\Omega, i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, \alpha\neq\beta,\ M_\alpha \in\mathrm{SOb}(\mathcal{C})_\alpha,\ M_\beta \in\mathrm{SOb}(\mathcal{C})_\beta.$$

**Задача 12.** Покажите, что всякий объект $M \in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ изоморфен $\oplus_{\alpha\in\Omega} M_\alpha$, где все подфакторы $M_\alpha$ принадлежат $\mathrm{SOb}(\mathcal{C})_\alpha$.

Напомним, что левый $R$-модуль $M$ называется циклическим, если $M \cong R/I$ для некоторого левого идеала $I$.

**Задача 13.** Пусть $M_1, M_2$ — два циклических модуля. Тогда $\mathrm{Ext}^i_R(M_1, M_2) = 0$ для $i \geq 2$.

Положим $R/b := R/(Rb)$.

**Задача 14.** а) Покажите, что $\mathrm{Hom}_R(R/b, R/c) = \{m \in R/c \mid bm = 0\}$ и что

$$\mathrm{Hom}_R(R/b, R/c) = 0 \text{ если и только если } ((bc' = b'c) \to (c' = rc, b' = br)).$$

б) Покажите, что $\mathrm{Ext}^1_R(R/b, R/c) = (R/c)/(b(R/c))$.

Положим $b\backslash R := R/(bR)$.

**Задача 15.** Покажите, что

$$\mathrm{Hom}_R(R/c, R/b) \cong\mathrm{Hom}_R(b\backslash R, c\backslash R), \quad \mathrm{Ext}^1_R(R/c, R/b) \cong\mathrm{Ext}^1_R(b\backslash R, c\backslash R)$$

**Задача 16.** Пусть $B_n :=\mathrm{span}\{x^i\partial_x^j\}_{i+j\leq n}$ и $b \in B_n$ — общий элемент, $R/b := \mathbb{C}[x, \partial_x]/(\cdot b)$.
а) Какие особые точки имеет $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуль $R/b$?
б) Какова диаграмма Ньютона $R/b$ в этих точках? Каковы её изломы?
в) Опишите соответствующие $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$-модули?
г) Изоморфны ли $R/b$ и $R/b'$ для общих $b, b' \in B_n$?

**Задача 17.** Пусть $M_1$, $M_2$ — два $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$-модуля, конечномерных как $\mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}})$-модули. Как по главным частям $M_1, M_2$ найти главные части $M_1 \otimes_{\mathbb{C}[x^{\mathbb{Q}})} M_2$?

## 2 Теоретические вопросы

**Вопрос 1.** Объясните как строится многообразие $\mathrm{SSupp}^B M$. Покажите, что оно инвариантно относительно умножения на константы и не зависит от выбора порождающего пространства $M_0$.

**Вопрос 2.** Пусть $M$ — ненулевой конечнопорождённый $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуль. Тогда $\dim \mathrm{SSupp}^B M{>}0$.

**Вопрос 3.** Пусть $M$ — ненулевой конечнопорождённый $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуль. Объясните что такое $\mathrm{V}(M)$ и $|\mathrm{V}(M)|$. Покажите, что $\dim \tilde{V}{>}0$ для всякой неприводимой компоненты $\tilde{V}$ многообразия $\mathrm{V}(M)$.

**Вопрос 4.** Пусть $D$ — простое нётерово кольцо, не являющееся артиновым слева, а $M$ — конечнопорождённый артинов $D$-модуль. Покажите, что $M$ — *цикличен*, то есть $M = D/I$ для некоторого левого идеала $I$.

**Вопрос 5.** Покажите, что для $\mathbb{C}[x, \partial_x]$-модуля $M$ следующие условия эквивалентны :
1) $M$ — голономен.
2) $M$ имеет конечную длину.
3) $M$ изоморфен $\mathbb{C}[x, \partial_x]/I$, где $I$ — нетривиальный левый идеал.

**Вопрос 6.** Дайте определение $U$-когерентного $D$-модуля. Покажите, что всякий $D$-модуль является $U$-когерентным для подходящего множества $U$.

**Вопрос 7.** Дайте определение связности. Какая связность называется мероморфной? Какая регулярной? Покажите, что всякая регулярная связность записывается в виде $\frac{\Gamma}{x}$ в подходящем базисе, где $\Gamma \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

**Вопрос 8.** Пусть $M_1, M_2$ — два $D$-модуля, не имеющих подфакторов, сосредоточенных в точках. Тогда $M_1 \cong M_2$ если и только если существует $U \subset \mathbb{C}$ такое, что
1) $M_1$ и $M_2$ являются $U$-когерентными и $\mathrm{Bun}(M_1)$ и $\mathrm{Bun}(M_2)$ — локально тривиальны над $U$;
2) ранги $\mathrm{Bun}(M_1)$ и $\mathrm{Bun}(M_2)$ совпадают и равны $r$;
3) матрицы связностей $\nabla_1$ и $\nabla_2$ переводятся друг в друга матрицей $F \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathcal{O}(U))$.

**Вопрос 9.** Дайте определение локально конечномерного действия оператора $A$ на пространстве $V$. Дайте определение весового и слабо весового модуля. Чему эквивалентна категория весовых модулей?

**Вопрос 10.** Что такое функтор Цукермана? Как связаны категория весовых модулей и категория $\mathbb{C}[\partial_x, x)$-модулей с регулярными особенностями в 0?

**Вопрос 11.** Объясните связь между классификацией регулярных связностей на $U_0^\vee$ и классификацией весовых модулей. Категории представлений какой конечномерной алгебры эквивалентна категория весовых модулей? Что есть соответствие Римана-Гильберта для кривой?

**Вопрос 12.** Что такое диаграмма Ньютона дифференциального оператора? Что такое направление излома диаграммы? Докажите, что если диаграмма оператора $a \in \mathbb{C}[\partial_x, x)$ имеет более одного излома, то $a = bc$ для дифференциальных операторов $b, c \in \mathbb{C}[\partial_x, x)$ ненулевой степени.

**Вопрос 13.** Сформулируйте и докажите версию основной теоремы алгебры для кольца $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$.

**Вопрос 14.** Дайте классификацию модулей (в т. ч. простых) $M$ кольца $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$. Что есть главные части $M$? Какую локальную систему в $U_0^\vee$ можно сопоставить $M$? Что есть расширенное соответствие Римана-Гильберта для кривой?

**Вопрос 15** (?)**.** Объясните что есть система стокса и какова связь этого понятия с категорией $\mathbb{C}[\partial_x, x^{\mathbb{Q}})$-модулей.