Листок 1. Симплициальные гомологии и когомологии. 8 февраля 2012

В задачах этого листка G обозначает произвольную абелеву группу, F — аддитивную группу некоторого поля. Если не оговорено противное, то имеются в виду симплициальные гомологии.

1. Вычислите гомологии с коэффициентами в G симплициального комплекса, состоящего из n изолированных точек.

2. Пусть K — связный симплициальный комплекс. Докажите, что $H_0(K;G) = G$.

3. а) Вычислите гомологии (с коэффициентами в G) n-мерного симплекса.
б) Вычислите гомологии (с коэффициентами в G) границы n-мерного симплекса.

4. Вычислите сингулярные гомологии точки (с коэффициентами в G).

Цепным отображением цепных комплексов C_* и C'_* называют семейство гомоморфизмов $\varphi_k : C_k \to C'_k$, удовлетворяющих соотношениям $\partial'_k\varphi_k = \varphi_{k-1}\partial_k$. Цепное отображение $\varphi_k : C_k \to C'_k$ индуцирует семейство гомоморфизмов $\varphi_* : H_k(C_*) \to H_k(C'_*)$. При этом $(\varphi\psi)_* = \varphi_*\psi_*$.

5. Докажите, что симплициальное отображение $f : K \to L$ индуцирует цепное отображение $f_k : C_k(K) \to C_k(L)$, которое определяется следующим образом:

$$f_k([a_0,\dots,a_k]) = \begin{cases} [f(a_0),\dots,f(a_k)], & \text{если } f(a_i) \neq f(a_j) \text{ при } i \neq j; \\ 0, & \text{если } f(a_i) = f(a_j) \text{ для некоторого } i \neq j. \end{cases}$$

Если для цепных отображений f, $g : C \to C'$ существует семейство гомоморфизмов $D_k : C_k \to C'_{k+1}$, удовлетворяющих соотношениям $\partial_{k+1}D_k + D_{k-1}\partial_k = g_k - f_k$, то такое семейство D называют *цепной гомотопией*, связывающей f и g.

6. Докажите, что если цепные отображения f, $g : C \to C'$ цепно гомотопны, то $f_* = g_*$.

7. Докажите, что гомотопные отображения индуцируют одинаковые отображения сингулярных гомологий.

Пусть K — конечный симплициальный комплекс размерности n. Его *эйлеровой характеристикой* называют число $\chi(K) = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n$, где a_i — количество i-мерных симплексов в K.

8. Пусть $b_k = \dim H_k(K;F)$. Докажите, что $\chi(K) = b_0 - b_1 + b_2 - \dots + (-1)^n b_n$.

9. Вычислите группы гомологий с коэффициентами в F: а) S^2; б) T^2; в) $\mathbb{R}P^2$; г) всех замкнутых двумерных поверхностей. (Зависит ли ответ от характеристики поля F?)

10. Вычислите группы гомологий цепного комплекса $V \xrightarrow{A} V \xrightarrow{A} V$, где A — линейный оператор, для которого $A^2 = 0$.

* * *

11. Пусть K — связный симплициальный комплекс. Докажите, что $H^0(K;G) = G$.

12. а) Докажите, что если $A : U \to V$ и $B : V \to W$ — линейные отображения, для которых $BA = 0$, то $A^*/\operatorname{Im} B^*$ — двойственное пространство для $B/\operatorname{Im} A$.
б) Докажите, что $H^k(K;F)$ — двойственное пространство для $H_k(K;F)$.