Листок 2. Точная последовательность пары. 15 февраля 2012

1. Докажите, что короткая точная последовательность цепных отображений

$$0 \to C'_* \xrightarrow{i_*} C_* \xrightarrow{p_*} C''_* \to 0$$

индуцирует длинную точную последовательность гомологий

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_k(C'_*) \xrightarrow{i_*} H_k(C_*) \xrightarrow{p_*} H_k(C''_*) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(C'_*) \xrightarrow{i_*} \dots$$

2. Вычислите сингулярные гомологии пары (D^n, S^{n-1}) и сингулярные гомологии S^n, рассмотрев точную последовательность пары (D^n, S^{n-1}).

3. Пусть K — симплициальный комплекс, L — его подкомплекс. Докажите, что если $k \geqslant 2$, то $H_k(K, L) \cong H_k(K \cup CL, CL) \cong H_k(K \cup CL)$, где CL — конус над L.

4. Вычислите гомологии пары $(S^p \times S^q, S^p \vee S^q)$.

5. Вычислите гомологии $S^p \times S^q$.

Точная последовательность Майера–Вьеториса для симплициальных гомологий

6. Пусть K — симплициальный комплекс, K_0 и K_1 — такие его подкомплексы, что $K = K_0 \cup K_1$. Положим $L = K_0 \cap K_1$.

а) Докажите, что имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to C_*(L) \xrightarrow{(j_0, -j_1)} C_*(K_0) \oplus C_*(K_1) \xrightarrow{(i_0, i_1)} C_*(K) \to 0,$$

где $j_a : L \to K_a$ и $i_a : K_a \to K$ — естественные вложения.

б) Докажите, что имеет место точная последовательность

$$\dots \to H_k(L) \to H_k(K_0) \oplus H_k(K_1) \to H_k(K) \to H_{k-1}(L) \to \dots$$

(*последовательность Майера–Вьеториса*).

7. Выразите гомологии букета $K \vee L$ через гомологии K и L.

8. Пусть K — симплициальный комплекс, ΣK — надстройка над K. Докажите, что для любого $k \geqslant 1$ имеется изоморфизм $H_k(\Sigma K) \cong \tilde{H}_{k-1}(K)$.

9. С помощью точной последовательности Майера–Вьеториса вычислите гомологии тора T^2.

10. а) С помощью точной последовательности Майера–Вьеториса вычислите гомологии дополнения узла в S^3 (ответ не зависит от выбора узла).

б) Вычислите гомологии дополнения зацепления в S^3, состоящего из n связных компонент (ответ зависит только от n).

11. Покажите, что для сингулярных гомологий (и произвольных пространств) теорема о точной последовательности Майера–Вьеториса, вообще говоря, неверна.