Листок 3. Клеточные гомологии. 22 февраля

1. Вычислите гомологии $\mathbb{C}P^n$ (в том числе и $\mathbb{C}P^\infty$) с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

2. Вычислите гомологии $\mathbb{R}P^n$ (в том числе и $\mathbb{R}P^\infty$): а) с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$; б) с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

3. Вычислите гомологии n-мерного тора T^n с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

4. Вычислите гомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$: а) замкнутых ориентируемых двумерных поверхностей; б) замкнутых неориентируемых двумерных поверхностей.

5. Пусть X — CW-комплекс, $H_1(X)$ — группа гомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}$. Докажите, что $H_1(X) = \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$.

6. Приведите пример нестягиваемого 2-мерного CW-комплекса, который имеет такие же гомологии, как у точки. (Указание: в качестве одномерного остова возьмите $S^1 \vee S^1$ и приклейте к нему две двумерные клетки по словам a^5b^{-3} и $b^3(ab)^{-2}$.)

Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа, причём $p \geqslant 3$. Зададим на единичной сфере $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ действие образующей группы $\mathbb{Z}_p$ следующим образом:

$$(z, w) \mapsto \big(\exp(2\pi i/p)z, \exp(2\pi iq/p)w\big).$$

Фактор сферы S^3 по такому действию группы $\mathbb{Z}_p$ называют *линзовым пространством* и обозначают $L(p, q)$.

7. Вычислите гомологии $L(p, q)$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

8. Будем рассматривать S^∞ как подмножество $\mathbb{C}^\infty$, состоящее из точек $(z_1, z_2, \dots)$, для которых $\sum |z_i|^2 = 1$. Введём на S^∞ следующее отношение эквивалентности: $(z_1, z_2, \dots) \sim (\varepsilon z_1, \varepsilon z_2, \dots)$, где $\varepsilon = \exp(2\pi i/m)$. Пространство $L_m^\infty = S^\infty/\sim$ называют *бесконечномерным линзовым пространством.* Вычислите гомологии пространства L_m^∞ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

9. Вычислите гомологии комплексного многообразия Грассмана $G_{n,\infty}^{\mathbb{C}}$ (состоящего из комплексных n-мерных подпространств в $\mathbb{C}^\infty$) с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

10. Вычислите гомологии вещественного многообразия Грассмана $G_{n,\infty}^{\mathbb{R}}$ (состоящего из вещественных n-мерных подпространств в $\mathbb{R}^\infty$) с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$.

11. Вычислите гомологии вещественного многообразия Грассмана $G_{2,4}$: а) с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$; б) с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.