Листок 4. Универсальные коэффициенты. Фундаментальный класс. 29 февраля

Задачи 1-5 требуется решить исходя непосредственно из определений, не используя общих теорем об универсальных коэффициентах.

1. Вычислите группы когомологий двумерных поверхностей с коэффициентами $\mathbb{Z}$.

2. Вычислите группы когомологий двумерных поверхностей с коэффициентами $\mathbb{Z}_p$, $p \neq 2$.

3. Докажите, что группа $H^1(X;\mathbb{Z})$ не имеет кручения.

4. Пусть $H_i(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{n_i} \oplus T_i$ и $H^i(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{m_i} \oplus T^i$, где T_i и T^i — конечные группы. Докажите, что $m_i = n_i$ и $T^i \cong T_{i-1}$.

5. Вычислите группы гомологий и когомологий линзы $L(p,q)$ с коэффициентами $\mathbb{Z}_p$.

* * *

6. Пусть $i_* : H_n(\partial W^{n+1}) \to H_n(W^{n+1})$ — гомоморфизм, индуцированный естественным включением. Тогда если многообразие W^{n+1} ориентируемо, а его край ∂W^{n+1} связен, то $i_* = 0$ для коэффициентов $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2$, а если оно неориентируемо, то $i_* = 0$ для коэффициентов $\mathbb{Z}_2$.

7. Докажите, что если $f : \partial W^{n+1} \to M^n$ — ограничение некоторого непрерывного отображения $F : W^{n+1} \to M^n$, причём многообразие W^{n+1} ориентируемо, а его край ∂W^{n+1} связен, то $\deg f = 0$.

8. Докажите, что $H_k(M^n \setminus \operatorname{Int} D^n) \cong H_k(M^n)$ при $1 \leqslant k \leqslant n-2$. (Здесь D^n — шар, расположенный в некоторой карте.)

9. Докажите, что если M^n — замкнутое ориентируемое многообразие, то утверждение задачи 8 остаётся верным и при $k = n-1$. Существенна ли здесь замкнутость многообразия M^n? А его ориентируемость?