Листок 5. Двойственность Пуанкаре. Реализация гомологических классов. 7 марта 2012

1. Пусть M^n — замкнутое ориентируемое многообразие, $H_k(M^n) \cong \mathbb{Z}^{a_k} \oplus T_k$ и $H^k(M^n) \cong \mathbb{Z}^{b_k} \oplus T^k$, где T_k и T^k — кручения. Докажите, что $a_k = a_{n-k}$, $b_k = b_{n-k}$, $T_k \cong T_{n-k-1}$, $T^k \cong T^{n-k+1}$ и $T^1 = 0$.

2. а) Докажите, что если M^n — замкнутое многообразие, а R — аддитивная группа коммутативного ассоциативного кольца с единицей, то

$$H^n(M^n; R) \cong \begin{cases} R & \text{для ориентируемого } M^n; \\ R/2R & \text{для неориентируемого } M^n. \end{cases}$$

б) Докажите, что если M^n — замкнутое ориентируемое многообразие, то группа $H_{n-1}(M^n; \mathbb{Z})$ не имеет кручения, а если M^n — замкнутое неориентируемое многообразие, то подгруппа кручения в $H_{n-1}(M^n; \mathbb{Z})$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$.

3. Пусть M^n — замкнутое ориентируемое многообразие, причём его надстройка ΣM^n гомеоморфна замкнутому ориентируемому многообразию. Докажите, что M^n — *гомологическая сфера*, т.е. $H_k(M^n) \cong H_k(S^n)$ для всех k.

4. а) Отображение $f\colon M_1^n \to M_2^n$ замкнутых ориентируемых многообразий имеет степень 1. Докажите, что это отображение индуцирует эпиморфизм фундаментальных групп. (Указание. Рассмотрите накрытие $\tilde{M}_2^n \to M_2^n$, соответствующее подгруппе $f_*\pi_1(M_1^n)$, и постройте поднятие отображения f в это накрытие. Отдельно разберите случаи, когда накрытие имеет конечное и бесконечное число листов.)

б) Докажите, что отображение степени 1 сферы с g ручками на сферу с h ручками существует тогда и только тогда, когда $g \geqslant h$.

Будем называть гомологический класс α над $\mathbb{Z}$ *примитивным*, если $\alpha \neq m\beta$, где $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, и β — некоторый гомологический класс над $\mathbb{Z}$. Отметим, что если $m\alpha = 0$, то $\alpha = (m+1)\alpha$, поэтому элемент конечного порядка не может быть примитивным.

5. Предположим, что замкнутая несамопересекающаяся кривая f реализует гомологический класс $\alpha \in H_1(M^2)$, где M^2 — замкнутое ориентируемое многообразие. Докажите, что тогда либо $\alpha = 0$, либо α — примитивный гомологический класс.

6. Докажите, что любой примитивный гомологический класс замкнутого ориентируемого многообразия M^2 реализуется замкнутой несамопересекающейся кривой.