# Листок 7. Двойственность Лефшеца и двойственность Александера. 21 марта 2012

**1.** Предположим, что в сферу $S^n$, $n \geqslant 3$, вложено $m$ попарно непересекающихся сфер $S^{n-2}$. Пусть $X$ — их дополнение. Вычислите гомологии $X$.

**2.** Пусть $M^{n-1} \subset S^n$ — замкнутое подмногообразие. Докажите, что $M^{n-1}$ ориентируемо и $S^n \setminus M^{n-1}$ состоит из двух связных компонент.

**3.** а) Докажите, что $\mathbb{R}P^2$ нельзя вложить в $\mathbb{R}^3$.

б) Докажите, что $\mathbb{R}P^2$ можно вложить в $\mathbb{R}^4$.

**4.** Докажите, что если $M^{2n}$ — замкнутое многообразие, то $\chi(M^{2n}) \equiv \dim H_n(M^{2n}; \mathbb{Z}_2) \pmod 2$.

**5.** Докажите, что если замкнутое многообразие $M^m$ является краем компактного многообразия $W^{m+1}$, то $\chi(M^m)$ — чётное число.

**6.** Докажите, что многообразия $\mathbb{R}P^{2n}$ и $\mathbb{C}P^{2n}$ не являются краями компактных многообразий.

**7.** Докажите, что многообразия $\mathbb{R}P^{2n+1}$ и $\mathbb{C}P^{2n+1}$ являются краями компактных многообразий.

**8.** а) Докажите, что пересечение циклов задает квадратичную форму на $H_n(M^{2n})/T_n$, где $T_n$ — подгруппа кручения, и форму на $H_n(M^{2n}; \mathbb{R})$.

б) Докажите, что при чётных $n$ эта форма (*форма пересечения*) симметрическая, а при нечётных $n$ кососимметрическая.

в) Докажите, что форма пересечения невырожденная.

г) Докажите, что при изменении ориентации многообразия форма пересечения меняет знак.

Пусть $\sigma(M^{4n})$ — сигнатура (индекс) формы пересечения замкнутого ориентируемого многообразия $M^{4n}$.

**9.** Пусть $M_1^{4n}$ и $M_2^{4n}$ — замкнутые ориентируемые многообразия. Докажите, что $\sigma(M_1^{4n} \# M_2^{4n}) = \sigma(M_1^{4n}) + \sigma(M_2^{4n})$.

**10.** Пусть $M^{4k}$ — замкнутое ориентируемое многообразие, которое является краем компактного ориентируемого многообразия $W^{4k+1}$. Докажите, что тогда $\sigma(M^{4k}) = 0$.