Комплексные поверхности,

лекция 12: Построение метрики Годушона

Миша Вербицкий

НМУ/матфак ВШЭ, Москва

28 апреля 2012

Фильтрованные алгебры (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: (Возрастающая) фильтрация на векторном пространстве V есть последовательность подпространств $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset ...$ таких, что $\bigcup V_i = V$. **Фильтрованная алгебра** это алгебра A с фильтрацией $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset ...$ такая, что $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Композиция дифференциальных операторов i-го и j-го порядка имеет порядок $\leqslant i + j$** (докажите это). Это задает фильтрацию

$$\mathsf{Diff}^0(M) \subset \mathsf{Diff}^1(M) \subset \mathsf{Diff}^2(M) \subset ...$$

на кольце дифференциальных операторов на .

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $D^i \in \mathsf{Diff}^i(M)$, $D^j \in \mathsf{Diff}^j(M)$ – дифференциальные операторы. **Докажите, что их коммутатор $[D^i, D^j]$ лежит в $\mathsf{Diff}^{i+j-1}(M)$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A = \bigcup_i A_i$ - ассоциативная алгебра с фильтрацией. Определим умножение на $\bigoplus_i A_i/A_{i-1}$ так, что произведение $a \mod A_{i-1}$ и $b \mod A_{j-1}$ дает $ab \mod A_{i+j-1}$. Такая алгебра называется **присоединенной градуированной алгеброй** фильтрованной алгебры A.

Алгебра символов (повторение)

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **присоединенная градуированная алгебра к алгебре дифференциальных операторов коммутативна.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Эта алгебра называется **алгеброй символов дифференциальных операторов**.

ТЕОРЕМА: $\operatorname{Diff}^i(M)/\operatorname{Diff}^{i-1}(M)$ **изоморфно пространству сечений расслоения** $\operatorname{Sym}^i TM$**.**

ТЕОРЕМА: Кольцо символов дифференциальных операторов на M **изоморфно кольцу функций на** T^*M**, полиномиальных на всех слоях** T_x^*M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $D \in \operatorname{Diff}^i(M)$ - дифференциальный оператор i-го порядка. Его **символ** это его образ в $\operatorname{Diff}^i(M)/\operatorname{Diff}^{i-1}(M) = \operatorname{Sym}^i TM$. Символ это функция на тотальном пространстве кокасательного расслоения T^*M, полиномиальная (и однородная степени i) на слоях T^*M.

Эллиптические операторы (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Все рассуждения о дифференциальных операторах из $C^\infty M$ в себя можно повторить для дифференциальных операторов из расслоения в расслоение. Пространство $\mathrm{Diff}^*(\mathcal{F},\mathcal{G})$ является $\mathrm{Diff}^*(M)$-модулем с фильтрацией, и **его присоединенный градуированный модуль изоморфен $\mathrm{Sym}^* TM \otimes \mathrm{Hom}_{C^\infty M}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ (докажите это).**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если $D: \ \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ – дифференциальный оператор i-го порядка на векторных расслоениях, его **символ** – сечение векторного расслоения $\mathrm{Sym}^i TM \otimes \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Мы будем рассматривать D как $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{G})$**-значную функцию на T^*M, полиномиальную (и однородную степени i) на слоях T^*M.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $D: \ \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ – дифференциальный оператор i-го порядка на векторных расслоениях одинакового ранга. Рассмотрим проекцию $\pi: \ \mathrm{Tot}(T^*M) \to M$. D называется **эллиптическим**, если его символ задает изоморфизм $\pi^*\mathcal{F} \to \pi^*\mathcal{G}$ в каждой точке $\xi \in T^*M$, лежащей вне нулевого сечения T^*M.

Эллиптические операторы второго порядка (повторение)

ПРИМЕР: Дифференциальный оператор второго порядка на $C^\infty\mathbb{R}^n$ записывается в виде

$$D(f)f = af + \sum_i b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} c_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

где a, b_i, $c_{i,j}$ – гладкие функции, а $x_i, i = 1, ..., n$ – координаты. Тогда его символ задается функцией $\xi \to \sum_{i,j} c_{i,j}\xi_i\xi_j$, где $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in T_x^*\mathbb{R}^n$. **Этот оператор эллиптичен, если матрица $c_{i,j}$ положительно или отрицательно определена в каждой точке $\mathbb{R}^n$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: По конвенции, считается, что **эллиптический оператор второго порядка** есть оператор, у которого матрица $c_{i,j}$ **положительно определена**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Эллиптический оператор второго порядка называется **униформно эллиптическим**, если b_i ограничены в метрике, которая задается $c_{i,j}$ (для компактных многообразий это требование выполнено автоматически).

Сильный принцип максимума (повторение)

ТЕОРЕМА:
(strong maximum principle for second order elliptic equations; Eberhard Hopf, 1927) Пусть M – многообразие, не обязательно компактное, а $D : C^\infty M \to C^\infty M$ – униформно эллиптический оператор второго порядка, причем $D(f) = 0$ для любой функции $f = const$''

$$Du = \sum_{i,j} A^{ij} u_{ij} + \sum_i B^i u_i,$$

Пусть u – функция такая, что $D(u) \geqslant 0$. **Предположим, что u имеет локальный максимум в какой-то точке M. Тогда u – константа.**

ПРИМЕР: Пусть M - риманово многообразие. Оператор Лапласа $\Delta : C^\infty M \to C^\infty M$, $\Delta(f) = d^* df$ – эллиптический оператор второго порядка. **Его символ равен тензору Римана $g \in \mathrm{Sym}^2 TM$ (проверьте это).**

Метрики Годушона

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ω - эрмитова форма комплексного эрмитова многообразия M, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. Метрика на M называется **метрикой Годушона**, если $\partial\bar\partial(\omega^{n-1}) = 0$.

ТЕОРЕМА: (П. Годушон, 1977) Пусть (M, ω) – компактное, комплексное, эрмитово n-мерное многообразие. Тогда **существует единственная** (с точностью до постоянного множителя) **положительная функция $\psi \in C^\infty M$ такая, что $\psi\omega$ - метрика Годушона.**

Доказательство теоремы Годушона следует из сильного принципа максимума и теоремы об индексе для эллиптических операторов.

Ограниченные операторы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V_1, V_2 - пространства с нормой. Линейный оператор $E: V_1 \to V_2$ называется **ограниченным**, если существует константа C такая, что $|E(v)| < C|v|$ для любого $v \in V_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Норма ограниченного оператора** как супремум $|E(v)|$ на единичной сфере $\{v \in V_1 \ \ | \ \ |v| = 1\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Оператор на банаховом пространстве **непрерывен тогда и только тогда, когда он ограниченный.**

ТЕОРЕМА: **(Банаха об обратном операторе) Если образ ограниченного оператора $F: H_1 \to H_2$ замкнут, то он задает гомеоморфизм между $H_1/\ker F$ и $\operatorname{im} F$.**

УПРАЖНЕНИЕ: **Докажите это.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Оператор называется **конечномерным**, если его образ конечномерен.

Фредгольмовы операторы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Ограниченный оператор $F: H_1 \to H_2$ на гильбертовых пространствах называется **фредгольмовым** (Fredholm), если его образ замкнут, а ядро и коядро конечномерны.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $F: H_1 \to H_2$ – ограниченный оператор. Докажите, что следующие утверждения равносильны. (1) F **фредгольмов**. (2) Существует ограниченный оператор $G: H_2 \to H_1$ такой, что $FG = \mathrm{Id}_{H_1} + K_1$, $GF = \mathrm{Id}_{H_2} + K_2$, **а операторы** K_1, K_2 **конечномерны.**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $F: H_1 \to H_2, G: H_2 \to H_3$ - ограниченные операторы. **Докажите, что** GF **фредгольмов, если** F **и** G **фредгольмовы.**

УПРАЖНЕНИЕ: **Пусть** GF **и** FG **фредгольмовы. Докажите, что** F **и** G **оба фредгольмовы.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **сумма фредгольмова оператора и конечномерного снова фредгольмова.**

Фредгольмовы операторы открыты в операторной топологии

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любого фредгольмова оператора F, найдется G такой, что $FG = 1 + K$, $GF = 1 + K'$, причем K и K' конечномерны, а G тоже фредгольмов.

ТЕОРЕМА: Пусть оператор $F: \ H \to H$ фредгольмов. **Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого оператора $G \in \operatorname{End}(H)$, удовлетворяющего $|G - F| < \varepsilon$, оператор G также фредгольмов.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $G_1 = G - F$. Если F тождественный оператор, имеем

$$(Id_H + G_1)^{-1} = Id_H - G_1 + G_1^2 - G_1^3 + ...$$

причем ряд $Id_H - G_1 + G_1^2 - G_1^3 + ...$ сходится для $|G_1| < 1$.

Шаг 2: Для произвольного фредгольмового F, найдем F_1 такой, что $FF_1 = \operatorname{Id}_H + K$ и $F_1F = \operatorname{Id}_H + K'$ а K, K' конечномерные, и напишем

$$GF_1 = (G_1 + F)F_1 = \operatorname{Id}_H + K + G_1F_1.$$

Норма G_1F_1 ограничена $|F_1||G_1|$. Б силу шага 1, для $|G_1| < |F_1|^{-1}$, оператор $\operatorname{Id}_H + G_1F_1$ обратим, а оператор $GF_1 = \operatorname{Id}_H + K + G_1F_1$ фредгольмов как сумма конечномерного и фредгольмова. ■

Индекс фредгольмова оператора

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Индексом** фредгольмова оператора F называется число $\dim \ker F - \dim \operatorname{coker} F$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **индекс $F' = F + K$ равен индексу F,** для любого конечномерного оператора $K : H_1 \to H_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Индекс фредгольмовых операторов согласован с композицией: $\operatorname{ind}(FG) = \operatorname{ind} F + \operatorname{ind} G$.

Индекс фредгольмова оператора (продолжение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $F: H_1 \to H_2$ фредгольмов оператор, а F_1 такой, что $FF_1 = \operatorname{Id}_H + K$, для конечномерного K. **Тогда для любого $G \in \operatorname{Hom}(H_1, H_2)$, удовлетворяющего $|G - F| < \|F_1\|^{-1}$, индексы G и F равны.**

Доказательство. Шаг 1: Очевидно,

$$GF_1 = \operatorname{Id}_H + K + (G - F)F_1$$

Оператор $\operatorname{Id}_H + (G - F)F_1$ обратим для $|(G - F)| < |F_1|^{-1}$, значит, имеет индекс 0, а оператор $\operatorname{Id}_H + (G-F)F_1 + K$ имеет тот же самый индекс, потому что индекс не меняется от добавления конечномерного оператора. **Мы получили, что индекс GF_1 равен нулю.**

Шаг 2: Поскольку $FF_1 = \operatorname{Id}_H + K$, $\operatorname{ind} FF_1 = 0$.

Шаг 3: В силу аддитивности индекса, $0 = \operatorname{ind} GF_1 = \operatorname{ind} FF_1$ влечет $\operatorname{ind} F = \operatorname{ind} G$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы получили, что **множество фредгольмовых операторов открыто в множестве всех ограниченных операторов,** с топологией, которая задается нормой, а **отображение $F \to \operatorname{ind} F$ локально постоянно.**

Основная теорема теории эллиптических операторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть F - расслоение со связностью и метрикой на M. Определим **соболевскую L^2-норму, ассоциированную со связностью и метрикой** на пространстве сечений F по формуле

$$|f|_s^2 = \sum_{i=0}^{s} \int |\nabla^i f|^2 \operatorname{Vol}$$

где ∇^i – i-я степень связности, а $|\cdot|$ – естественная метрика на расслоении $\Lambda^1(M)^{\otimes i} \otimes F$, индуцированная метрикой на M и F. Соответствующее гильбертово пространство обозначается $L_s^2(F)$.

ТЕОРЕМА: (основная теорема теории эллиптических операторов) Пусть $D: \ F \to G$ – эллиптический оператор i-го порядка. Продолжим D по непрерывности до отображения из $L_s^2(F)$ в $L_{s-i}^2(G)$. **Тогда D фредгольмов.** Более того, все собственные векторы D – бесконечно дифференцируемые сечения F.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из того, что все элементы $\ker D$ бесконечно дифференцируемы **следует, что** $\ker D: \ L_s^2(F) \to L_{s-i}^2(G)$ **не зависит от выбора** $s \in \{i, i+1, i+2, ...\}$.

Индекс эллиптического оператора

ЗАМЕЧАНИЕ: Если D эллиптический, **его сопряженный оператор D^* – тоже эллиптический.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Индекс** ind эллиптического оператора D это число $\dim\ker D - \dim\ker D^*$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть D_t – семейство эллиптических операторов i-го порядка, непрерывно зависящих от параметра $t \in [0,1]$. **Тогда** $\operatorname{ind} D_0 = \operatorname{ind} D_1$**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Каждому из D_t соответствует фредгольмов оператор $D_t : L^2_s(F) \to L^2_{s-i}(G)$, его индекс равен индексу D_t, а индекс фредгольмова оператора локально постоянный в норменной топологии. ■

СЛЕДСТВИЕ: Индекс эллиптического оператора зависит только от символа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Эллиптические операторы с одинаковым символом **можно продеформировать друг в друга, не меняя символ,** соединив их отрезком в пространстве дифференциальных операторов. ■

Теорема Атьи-Сингера об индексе

ЗАМЕЧАНИЕ: Непрерывные деформации символа тоже не меняют индекса **(докажите это).** Значит, **индекс зависит только от класса гомотопии символа,** который можно рассматривать как невырожденное сечение расслоения $\operatorname{Sym}^i TM \otimes \operatorname{Hom}(F, G)$. Такие сечения описываются явно с точностью до гомотопии в терминах характеристических классов (или топологической K-теории) многообразия M и расслоений F и G. **Формула Атьи-Зингера** - формула, выражающая индекс эллиптического оператора как некоторый полином от этих топологических инвариантов.

Теорема Атьи-Сингера об индексе (продолжение)

Нам понадобится следующая простая форма теоремы об индексе.

ТЕОРЕМА: (теорема Атьи-Зингера для эллиптических операторов второго порядка) Пусть M - гладкое многообразие, а $D: C^\infty M \to C^\infty M$ – эллиптический оператор второго порядка. Тогда $\operatorname{ind} D = 0$.

Доказательство. Шаг 1: Индекс ψ оператора D есть сечение $\operatorname{Sym}^2 TM$, то есть метрический тензор на T^*. Условие эллиптичности записывается как $\psi(v,v) \neq 0$, для любого ненулевого $v \in T^*M$, но это значит, что ψ - положительно (или отрицательно) определенная метрика. **Предположим, что ψ положительно определена.**

Шаг 2: Поскольку положительно определенные метрические тензоры составляют выпуклое подмножество в сечениях $\operatorname{Sym}^2 TM$, оно связно, а значит, **индекс D одинаковый для каждого D.**

Шаг 3: Осталось вычислить индекс для какого-нибудь из эллиптических операторов второго порядка, например, для оператора Лапласа Δ. Но оператор Лапласа самосопряжен, значит,

$$\operatorname{ind} \Delta = \dim \ker \Delta - \dim \ker \Delta^* = \dim \ker \Delta - \dim \ker \Delta = 0.$$

■

Теорема Годушона

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ω - эрмитова форма комплексного эрмитова многообразия M, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. Метрика на M называется **метрикой Годушона**, если $\partial\bar\partial(\omega^{n-1}) = 0$.

ТЕОРЕМА: (П. Годушон, 1977) Пусть (M, ω) – компактное, комплексное, эрмитово n-мерное многообразие. **Тогда существует единственная (с точностью до постоянного множителя) положительная функция $\psi \in C^\infty M$ такая, что $\psi\omega$ - метрика Годушона.**

Доказательство. Шаг 1: Достаточно найти функцию $\varphi > 0$ такую, что $\partial\bar\partial(\varphi\omega^{n-1}) = 0$. Тогда $\psi = \varphi^{1/(n-1)}$.

Шаг 2: Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L(\varphi) = \frac{\partial\bar\partial(\varphi\omega^{n-1})}{\omega^n}$$

Тогда L - эллиптический оператор, с тем же символом, что у оператора Лапласа (докажите это).

Теорема Годушона (продолжение)

Шаг 2: Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L(\varphi) = \frac{\partial\overline{\partial}(\varphi\omega^{n-1})}{\omega^n}$$

Тогда L - эллиптический оператор, с тем же символом, что у оператора Лапласа (докажите это).

Шаг 3: На пространстве $C^\infty M$ рассмотрим L^2-метрику, заданную формулой $(x,y) = \int_M xy\omega^n$. Пусть $\alpha \in C^\infty M$. Из формулы Стокса получаем

$$\int_M L(\varphi)\alpha\omega^n = \int_M \partial\overline{\partial}(\varphi\omega^{n-1})\alpha = \int_M \varphi\omega^{n-1} \wedge \partial\overline{\partial}\alpha,$$

то есть $L^*\alpha = \frac{\omega^{n-1}\wedge\partial\overline{\partial}\alpha}{\omega^n}$.

Шаг 4: Поскольку L^* зануляется на константах, его ядро одномерно в силу сильного принципа максимума По формуле индекса для эллиптических операторов второго порядка, $\operatorname{ind} L^* = 0$, значит, его коядро одномерно. **Мы получили, что** $\dim\ker L = 1$**.**

Теорема Годушона (окончание)

Шаг 5: Для существования метрики Годушона осталось убедиться, что любая ненулевая функция $u \in \ker L$ всюду положительна, либо всюду отрицательна. Тогда $\partial\bar\partial(u\omega^{n-1}) = 0$, значит, $\varphi^{1/(n-1)}\omega$ – метрика Годушона.

Шаг 6: Пусть $f \in \operatorname{im} L^*$. Применив принцип максимума, мы получим, что **в окрестности минимума f, эта функция строго отрицательна, в окрестности максимума строго положительна (проверьте это)**

Шаг 7: Если в ядре L найдется функция u, которая где-то положительна, где-то отрицательна, можно сконструировать функцию $\alpha \in C^\infty M$, которая всюду положительна, и удовлетворяет $\int_M u\alpha\omega^n = 0$. Но тогда $\alpha \in (\ker L)^* = \operatorname{im} L$, что невозможно в силу утверждения шага 6. **Поэтому каждая $u \in \ker L$ либо неположительна, либо неотрицательна.**

Шаг 8: Неравенство Харнака: пусть D есть эллиптический оператор на компакте. Тогда для любой области $\Omega \Subset \Omega'$ найдется такая константа C, что для любой $u \in \mathbb{C}^\infty\Omega'$, $u \geqslant 0$, $D(u) = 0$, имеет место $\sup_\Omega u \leqslant C \inf_\Omega u$. **Из этого сразу следует, что $u \neq 0$.** ■