Комплексные поверхности,

лекция 14: теорема Ламари (схема доказательства)

Миша Вербицкий

НМУ/матфак ВШЭ, Москва

14 мая 2012

Метрики Годушона (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ω - эрмитова форма комплексного эрмитова многообразия M, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. Метрика на M называется **метрикой Годушона**, если $\partial\overline{\partial}(\omega^{n-1}) = 0$.

ТЕОРЕМА: (П. Годушон, 1977) Пусть (M, ω) – компактное, комплексное, эрмитово n-мерное многообразие. Тогда **существует единственная** (с точностью до постоянного множителя) **положительная функция $\psi \in C^\infty M$ такая, что $\psi\omega$ - метрика Годушона.**

Доказательство теоремы Годушона следует из сильного принципа максимума и теоремы об индексе для эллиптических операторов.

Комплексные поверхности с нечетным b_1 (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть M - компактная комплексная поверхность. Тогда **$b_1(M)$ четно, если $H^1(\mathcal{O}_M)$ порождено антиголоморфными 1-формами, и нечетно в противном случае.** В первом случае, естественные отображения

$$H^0(\Omega^1 M) \oplus \overline{H^0(\Omega^1 M)} \to H^1(M, \mathbb{C}) \to H^1(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)}.$$

изоморфизмы, во втором - вложения, с коядром размерности 1. ■

ЛЕММА: ($\partial\overline{\partial}$-лемма для поверхностей с четным b_1). Пусть M - компактная комплексная поверхность с четным $b_1(M)$, а $\eta \in \Lambda^{1,1}(M)$ – точная (1,1)-форма. **Тогда $\eta = \partial\overline{\partial}\psi$, для какой-то функции $\psi \in C^\infty M$.** ■

Когомологии Ботта-Черна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространство

$$H^{1,1}_{BC}(M) := \frac{\ker d\big|_{\Lambda^{1,1}(M)}}{\operatorname{im} dd^c\big|_{C^\infty(M)}}$$

называется **пространством когомологий Ботта-Черна.**

УПРАЖНЕНИЕ: Используя эллиптические операторы, **убедитесь, что $H^{1,1}_{BC}(M)$ конечномерно.**

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что группа Ботта-Черна когомологий (1,1)-потоков, определенная таким же образом, как для форм, **изоморфна $H^{1,1}_{BC}(M)$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любого dd^c-замкнутого $(n-1,n-1)$-потока ψ, и любой замкнутой $(1,1)$-формы α, интеграл $\int_M \alpha\wedge\psi$ зависит только от класса когомологий α в $H^{1,1}_{BC}(M)$ **(проверьте это).**

Бочечные пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Подмножество $A \subset V$ топологического векторного пространства называется **абсорбирующим**, если $\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}} \lambda A = V$. Подмножество $A \subset V$ называется **бочкой** (barrel), если оно абсорбирующее, центрально-симметричное, выпуклое и замкнутое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Бочечное пространство** (barreled space) - это локально выпуклое пространство V, такое, что любая бочка $A \subset V$ содержит открытую окрестность нуля. **Пространство Бэра** - это такое топологическое пространство, которое нельзя разбить в счетное объединение нигде не плотных подмножеств.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Если V – локально выпуклое топологическое векторное пространство, которое является пространством Бэра, то V – бочечное.** Действительно, пусть $A \subset V$ – бочка. Тогда $V = \bigcup_{\lambda=2^n} \lambda A$, значит, V содержит внутреннюю точку x. Пусть $U \ni x$ соответствующая окрестность. Выпуклая оболочка множества $U \cup -U$ открыта и содержит 0 (докажите это).

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространства Фреше (и, следовательно, Банаха) являются бочечными. Действительно, **каждое полное, непустое метрическое пространство является пространством Бэра** (теорема Бэра о категории; **докажите ее**).

Монтелевские пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Предкомпактным подмножеством** называется подмножество топологического пространства, замыкание которого компактно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $K \subset V$ - подмножество топологического векторного пространства (ТВП). Мы говорим, что K **ограниченно**, если для каждой окрестности $U \ni 0$ найдется $\lambda > 0$ такая, что $\lambda K \subset U$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Компактный оператор** на ТВП есть оператор, переводящий ограниченные множества в прекомпактные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство Монтеля** это бочечное топологическое векторное пространство V, все ограниченные подмножества которого предкомпактны.

ЗАМЕЧАНИЕ: Иначе говоря, монтелевское пространство есть **пространство, тождественный оператор на котором компактен.**

Монтелевские пространства (продолжение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть V пространство Фреше с топологией, заданной набором норм $\nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \nu_3 \leqslant ...$ причем тождественное отображение $(V, \nu_i) \to (V, \nu_{i-1})$ компактно. **Тогда V – пространство Монтеля.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Тождественное отображение

$$(V, \nu_2, \nu_3, ...) \to (V, \nu_1, \nu_2, \nu_3, ...)$$

является компактным, потому что $(V, \nu_i) \to (V, \nu_{i-1})$ компактно. С другой стороны, это отображение – гомеоморфизм, потому что $\nu_1 \leqslant \nu_2$.
■

ПРИМЕР: Тождественное отображение из пространства функций с нормой C^i в пространство функций с нормой C^{i-1} компактно **(докажите это).** Выведите из этого, что **пространство Фреше тест-функций на многообразии является монтелевским.**

ЗАМЕЧАНИЕ: В бесконечномерном норменном пространстве единичный шар не может быть компактен ("Теорема Рисса"). Поэтому **бесконечномерное пространство Монтеля не может быть норменным.**

Слабая и сильная топология на V^*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V - топологическое векторное пространство, а V^* - пространство непрерывных функционалов на V. **Слабая топология** на V^* есть самая грубая топология, в которой непрерывны отображения $\langle \cdot, x\rangle \to \mathbb{R}$, для каждого $x \in V$. **Сильная топология** на V^* это топология униформной сходимости на ограниченных подмножествах.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть V – пространство Монтеля. **Тогда сильная топология на V^* совпадает со слабой.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть V - пространство Монтеля, V^* его двойственное. **Тогда V^* – тоже пространство Монтеля.**

СЛЕДСТВИЕ: **Пространство потоков – монтелевское.**

Рефлексивные пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Локально выпуклое топологическое пространство называется **рефлексивным**, если естественное отображение $V \to V^{**}$ (с сильной топологией оба раза) является изоморфизмом.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть V - пространство с нормой. Пространство V^* с сильной топологией является, по построению, полным относительно естественной нормы на V^* (докажите это). Поэтому **все рефлексивные норменные пространства банаховы.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Банаховы пространства не всегда рефлексивны. Вложение $V \to V^{**}$ является изометрией (выведите это из теоремы Хана-Банаха), но **оно может не быть наложением.**

ТЕОРЕМА: Пространство потоков рефлексивно.

ЗАМЕЧАНИЕ: Доказательство этой теоремы выводится из монтелевости пространства потоков.

Кэлеровы потоки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кэлеров поток на комплексном многообразии (M, I) это положительный $(1,1)$-поток Ξ такой, что $\Xi > \omega_1$ для какой-то эрмитовой формы ω_1 на M.

Теорема 1: Пусть – компактное комплексное многообразие, а $[v] \in H^{1,1}_{BC}(M)$ – класс когомологий. **Тогда следующие утверждения равносильны**: (i) $[v]$ представим кэлеровым потоком
(ii) $[v]$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\int_M [v] \wedge \psi > \varepsilon \int_M \omega \wedge \psi$$

для некоторого числа $\varepsilon > 0$, и любой положительной, dd^c-замкнутой $(n-1, n-1)$-формы $\psi \in \Lambda^{n-1,n-1}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть v – кэлеров поток, $v > \varepsilon\omega$, а $\alpha \in \Lambda^{1,1}(M)$ - любая гладкая форма в том же классе когомологий $[v] \in H^{1,1}_{BC}(M)$. Тогда

$$\int_M \alpha \wedge \psi > \varepsilon \int_M \omega \wedge \psi,$$

для каждой положительной формы $\psi > 0$. Поэтому $1 \Rightarrow 2$.

Доказательство $2 \Rightarrow 1$ (с использованием Хана-Банаха) непростое, и я его излагать не буду. ■

Плюригармонические потоки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Форма (или поток) α называется **плюригармонической**, если $dd^c\alpha = 0$. $(n-1, n-1)$-поток Ξ называется **неф-плюригармоническим,** если Ξ является пределом последовательности положительных, dd^c-замкнутых форм.

ЛЕММА 1: Пусть M - компактное, комплексное n-мерное многообразие, A - конус $(1,1)$-форм α, таких, что для некоторого числа $\varepsilon_\alpha > 0$, и любой положительной, dd^c-замкнутой $(n-1, n-1)$-формы $\psi \in \Lambda^{n-1,n-1}(M)$, имеет место неравенство

$$\int_M \alpha \wedge \psi > \varepsilon_\alpha \int_M \omega \wedge \psi,$$

а B - конус неф-плюригармонических $(n-1, n-1)$-потоков. **Тогда $A^* = B$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть K° - множество положительных dd^c--замкнутых форм $\psi \in \Lambda^{n-1,n-1}(M)$, удовлетворяющих $\int \omega \wedge \psi = 1$, а K - его замыкание в пространстве потоков. Поскольку K ограниченно, а пространство потоков монтелевское, K компактно. **Конус, натянутый на K, совпадает с конусом B неф-плюригармонических потоков.**

Плюригармонические потоки (продолжение)

Доказательство. Шаг 1: Пусть K° - множество положительных dd^c-- замкнутых форм $\psi \in \Lambda^{n-1,n-1}(M)$, удовлетворяющих $\int \omega \wedge \psi = 1$, а K - его замыкание в пространстве потоков. Поскольку K ограниченно, а пространство потоков монтелевское, K компактно. **Конус, натянутый на K, совпадает с конусом B неф-плюригармонических потоков.**

Шаг 2: Пусть α – (1,1)-форма, которая удовлетворяет $\int_M \alpha \wedge \psi > 0$ для любой dd^c-замкнутой, положительной ψ. Тогда $\alpha|_K > 0$, а поскольку K компактно, имеем $\alpha|_K > \varepsilon$. Это равносильно

$$\int_M \alpha \wedge \psi > \varepsilon \int_M \omega \wedge \psi.$$

Значит, $\alpha \in A$. **Мы получили, что $B^* \subset A$.**

Шаг 3: Применив рефлексивность, получим из этого $B = B^{**} \supset A^*$. Вложение $B \subset A^*$ очевидно, ибо элементы B спариваются с элементами A положительно, потому что B – замыкание множества положительных, dd^c-замкнутых форм. Это дает $B = A^*$. ■

Теорема Хана-Банаха и кэлеровы потоки

ТЕОРЕМА 2: Пусть M - компактное, комплексное n-мерное многообразие. Обозначим за $d^{1,1}: \Lambda^1 M \to \Lambda^{1,1} M$ композицию $d: \Lambda^1 M \to \Lambda^2 M$ и проекции на (1,1)-компоненту. Тогда следующие утверждения равносильны. (i) **Любой неф-плюригармоничный $(n-1, n-1)$-поток $\beta \in \operatorname{im} d^{1,1}$ равен нулю.** (ii) **На M существует кэлеров поток.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть на M существует кэлеров поток Ξ, и неф-плюригармоничный поток $\beta \in \operatorname{im} d^{1,1}$, являющийся пределом положительных плюригармоничных форм $\beta = \lim \beta_i$. Обозначим за $[\Xi]$ класс когомологий Ξ в $H^{1,1}_{BC}(M)$. Поскольку $d\Xi = 0$, а ядро d аннулирует $\operatorname{im} d^{1,1}$, $\int_M [\Xi] \wedge \beta = 0$.

Шаг 2: По определению кэлерова потока, существует $\varepsilon > 0$, такой, что $\int_M [\Xi] \wedge \beta_i \geqslant \varepsilon \int \omega \wedge \beta_i$. Переходя к пределу, получаем $0 = \int_M [\Xi] \wedge \beta \geqslant \varepsilon \int \omega \wedge \beta$. Значит, $\int \omega \wedge \beta = 0$. Поскольку β – положительный поток, из этого сразу следует, что $\beta = 0$. **Мы доказали, что (i) влечет (ii).**

Шаг 3: Пусть A – конус в формах, определенный в Лемме 1. Из Теоремы 1 следует, что $A \cap \ker d \neq 0$ **равносильно существованию кэлерова потока.**

Теорема Хана-Банаха и кэлеровы потоки (продолжение)

Шаг 3: Пусть A – конус в формах, определенный в Лемме 1. Из Теоремы 1 следует, что $A \cap \ker d \neq 0$ **равносильно существованию кэлерова потока.**

Шаг 4: Если на M не существует кэлерова потока, из теоремы Хана-Банаха получаем, что **существует** $(n-1, n-1)$**-поток** Θ**, который положителен на** A **и зануляется на замкнутых формах.** Но тогда $\Theta^{1,1} \in B$, то есть $\Theta^{1,1}$ – неф-плюригармонический поток в силу Леммы 1. Из точности Θ следует $\Theta^{1,1} \in \operatorname{im} d^{1,1}$. ■

Неф-плюригармонические потоки на поверхности и dd^c-лемма

ЗАМЕЧАНИЕ: dd^c-лемма для (1,1)-форм утверждает, что любая точная $(1,1)$-форма лежит в образе dd^c. Иначе говоря, dd^c-лемма говорит, что естественное отображение $H^{1,1}_{BC}(M) \to H^2(M)$ является вложением. **На прошлой лекции было доказано, что для поверхности dd^c-лемма равносильна четности $b_1(M)$.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть M комплексная поверхность с четным b_1 (это равносильно dd^c-лемме), а Ξ – неф-плюригармонический, $d^{1,1}$-точный $(1,1)$-поток. **Тогда Ξ точен.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $\int_M \Xi \wedge \Xi = \int_M \Xi^{1,1} \wedge \Xi^{1,1} + \int_M \Xi^{2,0} \wedge \Xi^{0,2}$, причем второй интеграл неотрицателен, и зануляется только если $\Xi^{0,2} = 0$. ■

Неф-плюригармонические потоки на поверхности и dd^c-лемма (продолжение)

Применяя dd^c-лемму еще раз, выводим из этого, что $\Xi = dd^c f$, для какой-то обобщенной функции $f \in D^0(M)$. Из формулы Стокса получаем:

$$\int_M \Xi \wedge \omega = \int_M dd^c f \wedge \omega = \int_M f \wedge dd^c \omega = 0,$$

где ω – метрика Годушона.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть M комплексная поверхность с четным b_1 (это равносильно dd^c-лемме), а Ξ – неф-плюригармонический, $d^{1,1}$-точный $(1,1)$-поток. **Тогда $\Xi = 0$.**

СЛЕДСТВИЕ: Пусть M комплексная поверхность с четным b_1 (это равносильно dd^c-лемме). **Тогда на M существует кэлеров поток.**

Регуляризация потоков по Демайи

ЗАМЕЧАНИЕ: Отметим, что **для любого набора $\{g_i\}$ голоморфных функций, функция $\log \sum_i(|g_i|^2)$ плюрисубгармонична,** то есть $(1,1)$-поток $dd^c \log \sum_i(|g_i|^2)$ положителен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть T - замкнутый (1,1)-поток, заданный как $T = dd^c\psi$, где ψ - обобщенная функции. Мы говорим, что ψ **имеет логарифмические полюса,** если $\psi = \lambda \log \sum_i(|g_i|^2) + \psi_0$, где ψ_0 – гладкая функция, а g_i голоморфные. Мы говорим, что T **имеет логарифмические особенности,** если его можно локально задать в виде $T = dd^c\psi$, где ψ – функция с логарифмическими полюсами.

ТЕОРЕМА: (Демайи) Пусть T - положительный, замкнутый $(1,1)$-поток на компактном, комплексном эрмитовом многообразии (M,ω). **Тогда существует последовательность потоков T_k с логарифмическими особенностями в том же классе когомологий $H^{1,1}_{BC}(M)$, причем $T_k \geqslant T - \delta_k\omega$, где δ_k стремится к 0, и $\{T_k\}$ сходится к T в топологии потоков.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Из этой теоремы сразу вытекает, что T_k кэлеровы потоки, если T кэлеров поток, а δ_k достаточно маленькие. **Поэтому если на многообразии M существует кэлеров поток, на M существует кэлеров поток с логарифмическими особенностями.**

Кэлеровы потоки на поверхности и регуляризация

ТЕОРЕМА: (Формула Пуанкаре-Лелонга) Пусть C – дивизор, заданный локально уравнением $g_C = 0$. **Тогда $\frac{1}{2\pi} dd^c \log |g_C| = [C]$.** ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть T – кэлеров поток с логарифмическими особенностями на поверхности M. **Тогда на M существует кэлеров поток T' с изолированными особенностями.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть теперь T - кэлеров поток с логарифмическими особенностями на поверхности, а Z его особое множество. По определению Z есть множество общих нулей голоморфных функций g_i, участвующих в определении логарифмических особенностей. Если Z содержит кривую C, локально определенную функцией g_C с простым нулем в неособых точках C, в окрестности этой кривой все функции g_i делятся на g_C. Поэтому

$$\lambda \log \sum_i (|g_i|^2) = \lambda \log |g_C|^2 + \lambda \log \sum_i (|g_i/g_C|^2).$$

В силу формулы Пуанкаре-Лелонга, $dd^c \lambda \log |g_C|^2 = \pi[C]$. Поэтому $T = [C] + T_1$, где T_1 тоже кэлеров поток. Отщепляя кривые одну за другой, рано или поздно получим поток с изолированными особенностями. ■

Регуляризованный максимум

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $\mu: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ гладкая функция, выпуклая вниз и неубывающая по всем аргументам, а $\varphi_1, ..., \varphi_n$ набор гладких плюрисубгармонических функций на M. **Докажите, что композиция $\mu(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ плюрисубгармонична.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mu: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ гладкая функция, выпуклая вниз и неубывающая по всем аргументам, причем для $|x-y| \geqslant \varepsilon$, $\mu(x,y) = \max(x,y)$, и к тому же $\mu(x,y) = \mu(y,x)$ и $\mu(y+\alpha, x+\alpha) = \mu(x,y)$ для всех $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$. Такая функция называется **регуляризованным максимумом**, и обозначается $\max_\varepsilon(x,y)$

ЗАМЕЧАНИЕ: Из предыдущего упражнения сразу следует, что **регуляризованный максимум $\max_\varepsilon(\varphi, \varphi')$ плюрисубгармоничен, если φ и φ' плюрисубгармоничны.**

Кэлеровы потоки с изолированными особенностями

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть T - кэлеров поток с изолированными особенностями на комплексном многообразии M. **Тогда в том же классе $[T] \in H^{1,1}_{BC}(M)$ существует кэлерова форма.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $z_1, z_2, ..., z_n$ - особые точки T, а

$$\varphi_i = \lambda \log \sum_\alpha (|g_\alpha|^2) + \psi_0$$

соответствующие потенциалы, равные $-\infty$ в z_i, и определенные в открытых множествах $U_i \subset M$ Выбрав U_i достаточно маленьким, можно применить локальную dd^c-лемму, и получить, что на нем есть кэлеров потенциал ψ, то есть такая функция, что форма $dd^c\psi$ кэлерова.

Шаг 2: Легко видеть, что для $A \ll 0$, функция $\max_\varepsilon(A+\psi, \varphi_i)$ равна φ_i вне компактной окрестности $z_i \in U_i$, и гладка всюду на U_i. Эта функция плюрисубгармонична в силу свойств **регуляризованного максимума.**

Шаг 2: Заменим T на $dd^c \max_\varepsilon(A+\psi, \varphi_i)$ внутри U_i, оставив его как есть вне U_i, Мы получим строго положительный, замкнутый поток, неособый в U_i (проверьте). **Повторив эту операцию во всех z_i, мы получим кэлерову форму.** ■