Комплексные поверхности,

лекция 3: теорема Калаби-Яу

Миша Вербицкий

НМУ/матфак ВШЭ, Москва

20 февраля 2012

Скрученный дифференциал d^c

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,I) – комплексное многообразие, $I: TM \to TM$ – **оператор комплексной структуры**, $I^2 = -\operatorname{Id}_{TM}$. **скрученный дифференциал** d^c определяется формулой $d^c := I^{-1} dI$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M,I) - комплексное многообразие. Тогда $\partial := \frac{d+\sqrt{-1}\,d^c}{2}$, $\overline{\partial} := \frac{d-\sqrt{-1}\,d^c}{2}$ – **компоненты в разложении Ходжа** d: $\partial = d^{1,0}$, $\overline{\partial} = d^{0,1}$.

ТЕОРЕМА: Пусть (M,I) – почти комплексное многообразие. **Тогда следующие утверждения равносильны:**

1. I интегрируемо. 2. $\partial^2 = 0$. 3. $\overline{\partial}^2 = 0$. 4. $dd^c = -d^c d$ 5. $dd^c = 2\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Кэлерово многообразие** есть комплексное эрмитово многообразие (M,I,g), **кэлерова форма** которого $\omega(x,y) = g(x,Iy)$ замкнута.

ЗАМЕЧАНИЕ: На кэлеровом многообразии имеет место коммутационное соотношение: $[dd^c, \Lambda] = \Delta$, где $\Lambda: \Lambda^{p,q}(M) \to \Lambda^{p-1,q-1}(M)$ оператор, сопряженный $L(\eta) = \eta \wedge \omega$, а $\Delta := dd^* + d^*d$ - оператор Лапласа. Значит, $\ker(dd^c|_{C^\infty M})) \subset \ker \Delta$. Но **все гармонические функции на компактном многообразии постоянны**, что дает $\ker(dd^c|_{C^\infty M}) = const$.

dd^c-лемма

ТЕОРЕМА: Пусть η - форма на компактном кэлеровом многообразии, которая удовлетворяет какому-то из условий
1. η – точная (p,q)-форма. 2. η – d^c-точная, d-замкнутая.
3. η – ∂-точная, $\overline{\partial}$-замкнутая.
Тогда $\eta \in \operatorname{im} dd^c = \operatorname{im} \partial\overline{\partial}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Кэлеров класс** $[\omega] \in H^2(M)$ есть класс когомологий кэлеровой формы.

СЛЕДСТВИЕ: Если ω, ω' – две формы с одинаковым кэлеровым классом, то $\omega' = \omega + dd^c\varphi$ для какой-то функции φ.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если φ такая функция, что $|dd^c\varphi|_g < 1$ везде на M, то **$\omega + dd^c\varphi$ – тоже кэлерова форма.**

ЗАМЕЧАНИЕ: $\ker dd^c = const$ на компактном многообразии, значит, множество кэлеровых метрик с заданным кэлеровым классом **отождествляется с открытым подмножеством в $C^\infty M/const$.**

Векторные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Векторное расслоение** на гладком многообразии есть локально тривиальный пучок $C^\infty M$-модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Голоморфное векторное расслоение** на гладком многообразии есть локально тривиальный пучок $\mathcal{O}_M$-модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: $B_{C^\infty} := B \otimes_{\mathcal{O}_M} C^\infty M$ называется **гладкое векторное расслоение, ассоциированное с голоморфным расслоением B.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M – комплексное многообразие. Тогда **оператор $\overline{\partial}: C^\infty M \to \Lambda^{0,1}(M)$ $\mathcal{O}_M$-линейный.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – голоморфное расслоение. Рассмотрим оператор $\overline{\partial}: B_{C^\infty} \to B_{C^\infty} \otimes \Lambda^{0,1}(M)$, переводящий $b \otimes f$ в $b \otimes \overline{\partial} f$, где $b \in B$ голоморфное сечение, а f гладкая функция. Этот оператор зовется **оператор голоморфной структуры** на голоморфном расслоении. **Он определен корректно в силу $\mathcal{O}_M$-линейности $\overline{\partial}$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Ядро $\overline{\partial}: B_{C^\infty} \to B_{C^\infty} \otimes \Lambda^{0,1}(M)$ **совпадает с образом B** при естественном вложении $B \hookrightarrow B_{C^\infty}$, $b \to b \otimes 1$.

Оператор голоморфной структуры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **$\overline{\partial}$-оператор** на гладком комплексном векторном расслоении V над есть оператор $V \stackrel{\overline{\partial}}{\to} \Lambda^{0,1}(M)\otimes V$, удовлетворяющий $\overline{\partial}(fb) = \overline{\partial}(f) \otimes b + f\overline{\partial}(b)$ для любых $f \in C^\infty M, b \in V$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $\overline{\partial}$-оператор **можно продолжить до**

$$\overline{\partial}: \Lambda^{0,i}(M) \otimes V \to \Lambda^{0,i+1}(M) \otimes V,$$

по формуле $\overline{\partial}(\eta \otimes b) = \overline{\partial}(\eta) \otimes b + (-1)^{\tilde{\eta}}\eta \wedge \overline{\partial}(b)$, где $b \in V$ и $\eta \in \Lambda^{0,i}(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Легко видеть, что $\overline{\partial}^2 = 0$,** если $\overline{\partial}$ – оператор голоморфной структуры на голоморфном расслоении B.

ТЕОРЕМА: (Атья-Ботт) Пусть $\overline{\partial}: V \to \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$ – $\overline{\partial}$-оператор на комплексном векторном расслоении, причем $\overline{\partial}^2 = 0$. **Тогда $B := \ker\overline{\partial} \subset V$ есть голоморфное расслоение того же ранга, и $V = B_{\mathbb{C}^\infty}$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы получили **эквивалентность категории голоморфных расслоений, и категории гладких комплексных расслоений, снабженных $\overline{\partial}$-оператором $\overline{\partial}: V \to \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$ таким, что $\overline{\partial}^2 = 0$.**

Связность и голоморфная структура

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – гладкое комплексное расслоение со связностью $\nabla: V \to \Lambda^1(M) \otimes V$ и голоморфной структурой $\overline{\partial}: V \to \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$. Рассмотрим разложение ∇ по типам, $\nabla = \nabla^{0,1} + \nabla^{1,0}$, где

$$\nabla^{0,1}: V \to \Lambda^{0,1}(M) \otimes V, \quad \nabla^{1,0}: V \to \Lambda^{1,0}(M) \otimes V.$$

Говорят что ∇ **совместима с голоморфной структурой**, если $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитово голоморфное расслоение** есть гладкое комплексное расслоение, снабженное эрмитовой метрикой и голоморфной структурой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Связность Черна** на эрмитовом голоморфном расслоении есть связность, совместимая с голоморфной структурой и сохраняющая метрику.

ТЕОРЕМА: На каждом голоморфном эрмитовом расслоении **связность Черна существует и единственна.**

Кривизна связности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\nabla : B \to B \otimes \Lambda^1 M$ – связность на гладком расслоении. Продолжим ∇ до оператора на формах

$$B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^2(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^3(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \dots$$

по формуле $\nabla(\eta \otimes b) = d\eta \otimes b + (-1)^{\tilde{\eta}} \eta \wedge \nabla b$. Тогда оператор $\nabla^2 : B \to B \otimes \Lambda^2(M)$ называется **кривизной** ∇.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из соотношения $\nabla \circ \nabla^2 = \nabla^2 \circ \nabla$ следует **тождество Бианки**: $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$.

Если B – линейное расслоение, то $\operatorname{End} B$ тривиально, и Θ_B есть 2-форма.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Кривизна линейного расслоения – замкнутая 2-форма.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для любой $2i$-формы θ имеем $\nabla(\theta \wedge \eta) = d\theta \wedge \eta + \theta \wedge \nabla(\eta)$ (правило Лейбница). Тождество Бьянки дает $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$. Следовательно, $d\Theta_B = 0$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Класс когомологий $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}[\Theta_B]$ называется **первым классом Черна** линейного расслоения.

Кривизна связности Черна

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Кривизна Θ_B связности Черна есть (1,1)-форма.**

СЛЕДСТВИЕ: Для связности Черна ∇, имеем $\Theta_B = \{\nabla^{1,0}, \bar\partial\}$.

СЛЕДСТВИЕ: **Кривизна линейного голоморфного расслоения - замкнутая (1,1)-форма.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть L – линейное расслоение, $b \in L$ – нигде не зануляющееся голоморфное сечение. **Тогда существует $(1,0)$-форма η такая, что $\nabla^{1,0}b = \eta \otimes b$.** Это дает $d|b|^2 = \operatorname{Re} g(\nabla^{1,0}b, b) = \operatorname{Re} \eta |b|^2$. **Мы получили $\nabla^{1,0}b = \frac{\partial |b|^2}{|b|^2} b = 2\partial \log |b| b$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – линейное эрмитово расслоение, а b - незануляющееся голоморфное сечение. Тогда $\nabla^{1,0}b = \frac{\partial |b|^2}{|b|^2} b = 2\partial \log |b| b$, что дает $\Theta_B(b) = 2\bar\partial\partial \log |b| b$, **то есть $\Theta_B = -2\partial\bar\partial \log |b|$.**

СЛЕДСТВИЕ: Если $g' = e^{2f} g$ – две метрики на голоморфном линейном расслоении, а Θ, Θ' – соответствующая кривизна, то $\Theta' - \Theta = -2\partial\bar\partial f = \sqrt{-1}\, dd^c f$.

Первый класс Черна

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – линейное расслоение на многообразии, U_α – его покрытие, на котором B тривиализовано, а $\varphi_{\alpha\beta}$ – функции перехода, определенные на $U_\alpha \cap U_\beta$. На пересечении $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ имеем $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}$ то есть B **задает** $(C^\infty M)^*$**-значный 1-коцикл.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Классы изоморфизма расслоений взаимно однозначно соответствуют $H^1(M, (C^\infty M)^*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из экспоненциальной точной последовательности

$$0 \to \mathbb{Z}_M \to C^\infty M \to (C^\infty M)^* \to 0,$$

получаем $0 \to H^1(M, (C^\infty M)^*) \xrightarrow{c_1^{\mathbb{Z}}} H^2(M, \mathbb{Z}) \to 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из определения ясно, что **комплексное линейное расслоение топологически тривиально** $\Leftrightarrow c_1^{\mathbb{Z}}(B) = 0$.

Первый класс Черна (продолжение)

ТЕОРЕМА: (Гаусс-Бонне)
При естественном отображении

$$H^2(M,\mathbb{Z}) \to H^2(M,\mathbb{R})$$

класс $c_1^{\mathbb{Z}}(B) \in H^2(M,\mathbb{Z})$ **переходит в класса Черна $c_1(B) \in H^2(M,\mathbb{R})$, выраженный через кривизну.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,I,ω) – n-мерное кэлерово многообразие, а $K(M) := \Lambda^{n,0}(M)$ – его **каноническое расслоение**, с естественной голоморфной структурой, заданной оператором $\overline{\partial}: \Lambda^{n,0}(M) \to \Lambda^{n,1}(M) = \Lambda^{n,0}(M) \otimes \Lambda^{0,1}(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Первый класс Черна комплексного n-мерного многообразия** есть $c_1(M) := c_1(\Lambda^{n,0}(M))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Многообразие Калаби-Яу** есть компактное кэлерово многообразие с $c_1^{\mathbb{Z}}(M) = 0$.

Теорема Калаби-Яу

ЗАМЕЧАНИЕ: Если задана вещественная $(1,1)$-форма η, ей соответствует симметрическая 2-форма $g_\eta(x,y) = \eta(x, Iy)$. **Это задает биекцию между вещественными $(1,1)$-формами и I-инвариантными симметрическими 2-формами**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Зададим на каноническом расслоении эрмитову метрику по формуле

$$(\alpha, \alpha') \to \frac{\alpha \wedge \overline{\alpha}'}{\omega^n}.$$

и пусть Θ_K – кривизна соответствующей связности Черна. **Кривизна Риччи** M есть симметрическая 2-форма $\mathsf{Ric}(x,y) = \Theta_K(x, Iy)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика называется **риччи-плоской**, если ее кривизна Риччи равна нулю.

ТЕОРЕМА: (Калаби-Яу) Пусть (M, I) – многообразие Калаби-Яу. **Тогда существует единственная риччи-плоская кэлерова метрика в каждом кэлеровом классе.**

K3-поверхности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **K3-поверхность** есть комплексная поверхность с $b_1 = 0$ и $c_1 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Все поверхности с $b_1 = 0$ - кэлеровы** (Бухсдаль-Ламари).

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Каноническое расслоение K_M тривиально.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Теорема Римана-Роха дает $\chi(\mathcal{O}_M) = 2 = \frac{c_2(M)}{12}$, значит, $c_2(M) = 24$. Поскольку $c_2(M)$ есть эйлерова характеристика M, получаем $b_2(M) = 22$.

Это дает ромб Ходжа для K3-поверхности:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Когомологии K3 не имеют кручения.**

Связность Леви-Чивита и кэлерова геометрия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M, g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения: $\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X, Y] = 0$

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I, g) – почти комплексное, эрмитово многообразие, а ∇ – связность Леви-Чивита. Тогда **равносильны:**

(i) $\nabla(I) = 0$

(ii) $d\omega = 0$**, и почти комплексная структура** I **интегрируема.**

Риччи-плоские метрики на K3

Теорема 1: Пусть (M, I, g) – K3-поверхность, где g – кэлерова метрика, а Ω – ненулевое голоморфное сечение $\Lambda^{2,0}(M, I)$. **Тогда следующие условия равносильны:** (1) g риччи-плоская (2) $\nabla\Omega = 0$, где ∇ – связность Леви-Чивита.

Доказательство. Шаг 1: Расслоение $(p, 0)$-форм голоморфно, и на этом расслоении **связность Леви-Чивита ∇ совпадает со связностью Черна.** Действительно, для голоморфной $(p, 0)$-формы, $\nabla^{0,1}\eta = \bar\partial\eta = d\eta$ в силу отсутствия кручения у ∇, и ∇ ортогональна по определению.

Шаг 2: Если $\nabla\Omega = 0$, значит, ∇ переводится в себя параллельным переносом, что дает $|\Omega| = const$, а условие риччи-плоскости – $-2\partial\bar\partial \log|\Omega| = 0$. То есть **из $\nabla\Omega = 0$ следует риччи-плоскость g.**

Шаг 3: Из риччи-плоскости Ω следует $\partial\bar\partial \log|\Omega| = 0$, что дает $|\Omega| = const$. Мы получили, что Ω есть голоморфное сечение линейного расслоения $K(M)$, имеющее постоянную длину. В силу формулы $\nabla^{1,0}\Omega = 2\partial \log|\Omega|\Omega$, **из этого следует, что Ω параллельна.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Тот же аргумент работает для любого многообразия с тривиальным каноническим расслоением.

Гиперкэлеровы многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гиперкомплексное многообразие** есть гладкое многообразие, снабженное комплексными структурами $I, J, K : TM \to TM$, которые удовлетворяют кватернионным соотношениям: $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\operatorname{Id}$. **Гиперкэлерово многообразие** есть гиперкомплексное многообразие, снабженное римановой метрикой g, которая кэлерова по отношению к I, J, K.

ЗАМЕЧАНИЕ: Кэлеровость равносильна условию $\nabla(I) = 0$, а гиперкэлеровость - **условию $\nabla(I) = \nabla(J) = \nabla(K) = 0$ плюс кватернионные соотношения.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $h \in \mathbb{H}$ – унитарный кватернион, а (M, I, J, K, g) – гиперкэлерово многообразие. Тогда $(M, hIh^{-1}, hJh^{-1}, hKh^{-1}, g)$ – тоже гиперкэлерово многообразие (**проверьте это**). Многообразия (M, I, J, K, g) и $(M, hIh^{-1}, hJh^{-1}, hKh^{-1}, g)$ называются **эквивалентными**.

Гиперкэлеровы структуры на K3-поверхности

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I, g) – K3-поверхность, где g – кэлерова метрика. Тогда M **допускает гиперкэлерову структуру** (M, I, J, K, g) **тогда и только тогда, когда** g **Риччи-плоская**.

Доказательство. Шаг 1: Пусть (M, I, J, K, g) – гиперкэлерова метрика на K3. Пусть z_1, z_2 – **ортонормированный базис в** $\Lambda^{1,0}_x M$ **такой, что** $J(z_1) = \bar{z}_2$ (поскольку $IJ = -JI$, оператор J отображает $\Lambda^{1,0}$ в $\Lambda^{0,1}$).

Шаг 2: Записав $z_1 = e_1 + \sqrt{-1}\, e_2$ и $z_2 = e_3 + \sqrt{-1}\, e_4$, получаем $I(e_1) = e_2, I(e_2) = -e_1$. Аналогично, $J(e_1) = e_3, J(e_2) = e_4$ и т.д. Словом, I, J, K **действуют на векторах** $\pm e_i$ **перестановками** (допишите это действие самостоятельно).

Шаг 3: Рассмотрим кэлеровы формы, связанные с I, J, K: ω_I, ω_J, ω_K. Они очень просто записываются в этом базисе: $\omega_I = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$, $\omega_J = e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$, $\omega_K = e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3$. Это дает $\omega_J + \sqrt{-1}\omega_K = z_1 \wedge z_2$. Мы получили сечение канонического расслоения. Поскольку $\nabla\Omega = 0$, **это сечение имеет постоянную длину, голоморфно, и метрика** g **риччи-плоская.**

Гиперкэлеровы структуры на K3-поверхности (продолжение)

Шаг 4: Наоборот, если g – риччи-плоская метрика на K3, а Ω – голоморфное сечение канонического расслоения длины 1, напишем $\omega_J := \operatorname{Re}\Omega$ и $\omega_J := \operatorname{Im}\Omega$, и пусть $J, K : TM \to TM$ автоморфизмы, полученные из $g(x, Jy) = \omega_J(x, y)$ и $g(x, Ky) = \omega_K(x, y)$. Вышеприведенное вычисление показывает, что (I, J, K) **удовлетворяет кватернионным соотношениям**.

Шаг 5: В условиях предыдущего шага, операторы I, J, K сохраняются связностью, потому что они выражаются через формы ω_I, ω_J, ω_K, **которые параллельны по Теореме 1. Значит, (M, I, J, K, g) – гиперкэлерово.** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Голоморфное симплектическое многообразие есть комплексное $2n$-мерное многообразие (M, I), снабженное замкнутой 2-формой $\Omega \in \Lambda^{2,0}(M, I)$ такой, что Ω^n – невырожденное сечение канонического расслоения.

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу доказанного выше, кэлерова комплексная поверхность **допускает гиперкэлерову структуру тогда и только тогда, когда она голоморфно симплектична.** Таких поверхностей ровно две: тор и K3.

Гиперкэлеровы и голоморфно симплектические многообразия

УТВЕРЖДЕНИЕ: Любое гиперкэлерово многообразие голоморфно симплектично.

Доказательство. Шаг 1: Напишем кэлеровы формы, связанные с I, J, K: ω_I, ω_J, ω_K. Любая их линейная комбинация замкнута. **Осталось доказать, что $\Omega := \omega_J + \sqrt{-1}\,\omega_K$ имеет тип (2,0) на (M, I).** В этом можно убедиться, записав кватернионное действие в базисе, как мы делали для K3, или следующим образом.

Шаг 2: Рассмотрим действие алгебры Ли $\mathfrak{u}(1)$ на $T(M, I)$, и продолжим на тензоры по формуле Лейбница. Получаем: $t\big|_{\Lambda^{p,q}(M)} = (p-q)\sqrt{-1}$.

Шаг 3: Легко видеть, что $t(J) = [I, J] = 2K, t(K) = [I, K] = -2J$, что дает $t(\omega_J) = -2\omega_K, t(\omega_K) = 2\omega_J$. Значит, $t(\Omega) = -2\omega_K + 2\sqrt{-1}\,\omega_J = 2\sqrt{-1}\,\Omega$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Обратное тоже верно, и выводится (с некоторым трудом) из теоремы Калаби-Яу. Пусть (M, I) – кэлерово, голоморфно симплектическое многообразие. **Тогда (M, I) допускает гиперкэлерову метрику, единственную в любом заданном кэлеровом классе.**