Комплексные поверхности,

лекция 4: связность Леви-Чивита и локальная теорема Торелли

Миша Вербицкий

НМУ/матфак ВШЭ, Москва

27 февраля 2012

Связность на расслоении

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространство сечений расслоения B на гладком многообразии обозначается B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на векторном расслоении B есть отображение $B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes B$ удовлетворяющее $\nabla(fb) = df \otimes b + f\nabla b$ для любых $b \in B$, $f \in C^\infty M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $X \in TM$ – векторное поле, $b \in B$, то $\nabla_X b$ **– сечение B, полученное как $\langle \nabla b, X \rangle$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Связность на B определяет связность на двойственном расслоении B^*, и наоборот, по формуле

$$\langle \nabla_X(b), \xi \rangle + \langle b, \nabla_X(\xi) \rangle = \operatorname{Lie}_X(\langle b, \xi \rangle).$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любого тензорного расслоения $\mathcal{B}_1 := B^* \otimes B^* \otimes ... \otimes B^* \otimes B \otimes B \otimes ... \otimes B$ **связность на B определяет связность на $\mathcal{B}_1$** по **формуле Лейбница:**

$$\nabla(b_1 \otimes b_2) = \nabla(b_1) \otimes b_2 + b_1 \otimes \nabla(b_2).$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Связности образуют **аффинное пространство** над пространством сечений расслоения $\operatorname{End}(B) \otimes \Lambda^1 M$.

Формула Картана

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для любого $\eta \in \Lambda^1 M$, и $X, Y \in TM$ имеем

$$d\eta(X,Y) = \eta([X,Y]) - \operatorname{Lie}_X(\eta(Y)) + \operatorname{Lie}_Y(\eta(X)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

1. **Обе стороны уравнения удовлетворяют правилу Лейбница.**

3. **Для $\eta = df$, обе стороны уравнения равны нулю.**

4. Дифференциал де Рама есть **единственное** отображение

$$d: \Lambda^*(M) \to \Lambda^{*+1}(M),$$

удовлетворяющее правилу Лейбница и $d^2 = 0$.

Кручение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ∇ – связность на $\Lambda^1 M$,

$$\Lambda^1 \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$$

Кручение ∇ задается формулой $\operatorname{Alt} \circ \nabla - d$, где $\operatorname{Alt} : \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \to \Lambda^2 M$ - внешнее умножение. Кручение есть отображение $T_\nabla : \Lambda^1 M \to \Lambda^2 M$.

ЗАМЕЧАНИЕ:

$$\begin{aligned} T_\nabla(f\eta) &= \operatorname{Alt}(f\nabla\eta + df \otimes \eta) - d(f\eta) \\ &= f\Big[\operatorname{Alt}(\nabla\eta) - d\eta\Big] + df \wedge \eta - df \wedge \eta = fT_\nabla(\eta). \end{aligned}$$

Значит, T_∇ линейно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M, g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

Кручение и коммутатор векторных полей

ЗАМЕЧАНИЕ: По формуле Картана,

$$\begin{aligned} T_\nabla(\eta)(X,Y) =& \nabla_X(\eta)(Y) - \nabla_Y(\eta)(X) - d\eta(X,Y) \\ =& \nabla_X(\eta)(Y) - \nabla_Y(\eta)(X) - \eta([X,Y]) - \operatorname{Lie}_X(\eta(Y)) + \operatorname{Lie}_Y(\eta(X)). \end{aligned}$$

С другой стороны, $\nabla_X(\eta)(Y) = \operatorname{Lie}_X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X(Y))$. Сравнивая и сокращая $\operatorname{Lie}_X(\eta(Y))$, $\operatorname{Lie}_Y(\eta(X))$, получаем

$$T_\nabla(\eta)(X,Y) = \eta\Big(\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,Y]\Big).$$

Кручение часто определяют как отображение $\Lambda^2 TM \to TM$ формулой $\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,Y]$. Это оператор, двойственный определенному выше.

Аффинные пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Торсор** над группой G есть пространство X, снабженное свободным и транзитивным действием G, $g, x \to \rho(g, x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Морфизм** торсоров $(X, G, \rho) \stackrel{\Psi}{\to} (X', G', \rho')$ есть пара $\Psi_X : \ X \to X', \Psi_G : \ G \to G'$, где Ψ_G есть гомоморфизм групп, и согласованное с действием G, G' на X, X' так: $\Psi_X(\rho(g, x)) = \rho'(\Psi_G(g), \Psi_X(x))$

ЗАМЕЧАНИЕ: **Торсоры образуют категорию.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Аффинное пространство** есть торсор над линейным пространством V, которое называется его **линеаризацией**.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Действие V на A обозначается $a, v \to a + v$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Морфизм** аффинных пространств есть морфизм соответствующих торсоров.

ЗАМЕЧАНИЕ: Это то же самое, что отображение $A \stackrel{\Psi_A}{\to} A'$, плюс гомоморфизм линеаризаций $L \stackrel{\Psi_L}{\to} L'$ такой, что $\Psi_A(a + l) = \Psi_A(a) + \Psi_L(l)$.

Линеаризация кручения

ЗАМЕЧАНИЕ: Если ∇_1 и ∇_2 – связности на расслоении B, их разность есть сечение $\operatorname{End}(B)\otimes\Lambda^1 M$. **Пространство $\mathcal{A}(B)$ связностей на B есть аффинное пространство**, то есть торсор над пространством сечений $\operatorname{End}(B)\otimes\Lambda^1 M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Кручение есть аффинное отображение**

$$\mathcal{A}(\Lambda^1 M) \to \operatorname{Hom}(\Lambda^1 M, \Lambda^2 M) = TM \otimes \Lambda^2 M.$$

потому что $T(\nabla+\alpha) = T(\nabla)+\operatorname{Alt}_{12}(\alpha)$, где $\operatorname{Alt}_{12}: \Lambda^1 M\otimes\operatorname{End}(\Lambda^1 M) \to \Lambda^2 M\otimes TM$ есть альтернирование по первым двум индексам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Линеаризованное кручение** есть отображение $T_{lin} = \operatorname{Alt}$,

$$T_{lin}: \Lambda^1(M)\otimes\Lambda^1(M)\otimes TM \to \Lambda^2 M\otimes TM$$

полученное как линеаризация кручения.

Связность Леви-Чивита

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M, g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – расслоение с метрикой. **Тогда на B всегда существует ортогональная связность.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем покрытие $\{U_i\}$, в котором B тривиально и допускает ортонормальный базис. На каждом U_i выберем связность ∇_i, которая сохраняет этот базис. Пусть ψ_i – разбиение единицы, подчиненное $\{U_i\}$. Тогда **формула $\nabla(b) := \sum \nabla_i(\psi_i b)$ определяет ортогональную связность** (проверьте это). ■

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

Связность Леви-Чивита (существование и единственность)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем ортогональную связность ∇ на $\Lambda^1 M$. Пространство ортогональных связностей – аффинное, и **его линеаризация есть $\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$.**

Шаг 1: Отождествляя TM и $\Lambda^1 M$, получаем $\mathfrak{so}(TM) = \Lambda^2 M$.

Шаг 2: Линеаризованное кручение есть отображение

$$T_{lin}: \ \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM) = \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^2 M \stackrel{\mathsf{Alt}}{\to} \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M = \Lambda^2 M \otimes TM.$$

Это изоморфизм. Справа и слева расслоения одной размерности, так что **достаточно доказать, что T_{lin} нет ядра.** Но если $\eta \in \ker T_{lin}$, η **симметрична по первым двум аргументам и кососимметрична по последним,** что дает $\eta(x,y,z) = \eta(y,x,z) = -\eta(y,z,x)$. **То есть $\sigma(\eta) = -\eta$, где σ есть циклическая перестановка аргументов.** Поскольку $\sigma^3 = 1$, из этого следует, что $\eta = 0$.

Шаг 3: Мы получили, что **ортогональная связность однозначно задается своим кручением,** ибо кручение задает изоморфизм аффинных пространств.

Шаг 4: Возьмем $\nabla := \nabla_0 - T_{lin}^{-1}(T_{\nabla_0})$. Тогда $T_\nabla = T_{\nabla_0} - T_{lin}(T_{lin}^{-1}(T_{\nabla_0})) = 0$, значит **$\nabla$ – связность без кручения**. ■

Кривизна связности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\nabla : B \to B \otimes \Lambda^1 M$ – связность на гладком расслоении. Продолжим ∇ до оператора на формах

$$B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^2(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^3(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} ...$$

по формуле $\nabla(\eta \otimes b) = d\eta \otimes b + (-1)^{\tilde{\eta}} \eta \wedge \nabla b$. Тогда оператор $\nabla^2 : B \to B \otimes \Lambda^2(M)$ называется **кривизной** ∇.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из соотношения $\nabla \circ \nabla^2 = \nabla^2 \circ \nabla$ следует **тождество Бианки**: $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$.

Если B – линейное расслоение, то $\operatorname{End} B$ тривиально, и Θ_B есть 2-форма.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Кривизна линейного расслоения – замкнутая 2-форма.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для любой $2i$-формы θ имеем $\nabla(\theta \wedge \eta) = d\theta \wedge \eta + \theta \wedge \nabla(\eta)$ (правило Лейбница). Тождество Бьянки дает $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$. Следовательно, $d\Theta_B = 0$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Класс когомологий $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}[\Theta_B]$ называется **первым классом Черна** линейного расслоения.

Первый класс Черна (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – линейное расслоение на многообразии, U_α – его покрытие, на котором B тривиализовано, а $\varphi_{\alpha\beta}$ – функции перехода, определенные на $U_\alpha \cap U_\beta$. На пересечении $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ имеем $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}$ то есть B **задает $(C^\infty M)^*$-значный 1-коцикл.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Классы изоморфизма расслоений взаимно однозначно соответствуют $H^1(M, (C^\infty M)^*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из экспоненциальной точной последовательности

$$0 \to \mathbb{Z}_M \to C^\infty M \to (C^\infty M)^* \to 0,$$

получаем $0 \to H^1(M, (C^\infty M)^*) \xrightarrow{c_1^{\mathbb{Z}}} H^2(M, \mathbb{Z}) \to 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из определения ясно, что **комплексное линейное расслоение топологически тривиально $\Leftrightarrow c_1^{\mathbb{Z}}(B) = 0$.**

Формула Гаусса-Бонне (повторение)

ТЕОРЕМА: (Гаусс-Бонне)
При естественном отображении

$$H^2(M,\mathbb{Z}) \to H^2(M,\mathbb{R})$$

класс $c_1^{\mathbb{Z}}(B) \in H^2(M,\mathbb{Z})$ **переходит в класса Черна $c_1(B) \in H^2(M,\mathbb{R})$, выраженный через кривизну.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,I,ω) – n-мерное кэлерово многообразие, а $K(M) := \Lambda^{n,0}(M)$ – его **каноническое расслоение**, с естественной голоморфной структурой, заданной оператором $\overline{\partial}: \Lambda^{n,0}(M) \to \Lambda^{n,1}(M) = \Lambda^{n,0}(M) \otimes \Lambda^{0,1}(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Первый класс Черна комплексного n-мерного многообразия** есть $c_1(M) := c_1(\Lambda^{n,0}(M))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Многообразие Калаби-Яу** есть компактное кэлерово многообразие с $c_1^{\mathbb{Z}}(M) = 0$.

Теорема Калаби-Яу (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Кэлеров класс** $[\omega] \in H^2(M)$ кэлерова многообразия есть класс когомологий кэлеровой формы ω.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если задана вещественная $(1,1)$-форма η, ей соответствует симметрическая 2-форма $g_\eta(x,y) = \eta(x, Iy)$. **Это задает биекцию между вещественными $(1,1)$-формами и I-инвариантными симметрическими 2-формами** (проверьте это).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Зададим на каноническом расслоении эрмитову метрику по формуле

$$(\alpha, \alpha') \to \frac{\alpha \wedge \overline{\alpha}'}{\omega^n}.$$

и пусть Θ_K – кривизна соответствующей связности Черна. **Кривизна Риччи M** есть симметрическая 2-форма $\mathrm{Ric}(x,y) = \Theta_K(x, Iy)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика называется **риччи-плоской**, если ее кривизна Риччи равна нулю.

ТЕОРЕМА: (Калаби-Яу) Пусть (M, I) – многообразие Калаби-Яу. **Тогда существует единственная риччи-плоская кэлерова метрика в каждом кэлеровом классе.**

К3-поверхности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **К3-поверхность** есть комплексная поверхность с $b_1 = 0$ и $c_1 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Все поверхности с $b_1 = 0$ - кэлеровы** (Бухсдаль-Ламари).

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Каноническое расслоение K_M тривиально.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Теорема Римана-Роха дает $\chi(\mathcal{O}_M) = 2 = \frac{c_2(M)}{12}$, значит, $c_2(M) = 24$. Поскольку $c_2(M)$ есть эйлерова характеристика M, получаем $b_2(M) = 22$.

Это дает ромб Ходжа для К3-поверхности:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 0 & & 0 & \\
1 & & 20 & & 1 \\
 & 0 & & 0 & \\
 & & 1 & &
\end{array}
$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Когомологии К3 не имеют кручения.**

Гиперкэлеровы многообразия (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гиперкомплексное многообразие** есть гладкое многообразие, снабженное комплексными структурами $I, J, K : TM \to TM$, которые удовлетворяют кватернионным соотношениям: $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\operatorname{Id}$. **Гиперкэлерово многообразие** есть гиперкомплексное многообразие, снабженное римановой метрикой g, которая кэлерова по отношению к I, J, K.

ЗАМЕЧАНИЕ: Кэлеровость I равносильна условию $\nabla(I) = 0$, где ∇ – связность Леви-Чивита, а гиперкэлеровость – **условию $\nabla(I) = \nabla(J) = \nabla(K) = 0$ плюс кватернионные соотношения.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $h \in \mathbb{H}$ – унитарный кватернион, а (M, I, J, K, g) – гиперкэлерово многообразие. Тогда $(M, hIh^{-1}, hJh^{-1}, hKh^{-1}, g)$ – тоже гиперкэлерово многообразие (**проверьте это**). Многообразия (M, I, J, K, g) и $(M, hIh^{-1}, hJh^{-1}, hKh^{-1}, g)$ называются **эквивалентными**.

Гиперкэлеровы структуры на К3-поверхности (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I, g) – К3-поверхность, где g – кэлерова метрика. Тогда M **допускает гиперкэлерову структуру** (M, I, J, K, g) **тогда и только тогда, когда** g **Риччи-плоская**.

Выведем, для примера, из гиперкэлеровой структуры риччи-плоскость метрики.

Шаг 1: Пусть (M, I, J, K, g) – гиперкэлерова метрика на К3. Пусть z_1, z_2 – **ортонормированный базис в** $\Lambda^{1,0}_x M$ **такой, что** $J(z_1) = \overline{z}_2$ (поскольку $IJ = -JI$, оператор J отображает $\Lambda^{1,0}$ в $\Lambda^{0,1}$).

Шаг 2: Записав $z_1 = e_1 + \sqrt{-1}\, e_2$ и $z_2 = e_3 + \sqrt{-1}\, e_4$, получаем $I(e_1) = e_2, I(e_2) = -e_1$. Аналогично, $J(e_1) = e_3, J(e_2) = e_4$ и т.д. Словом, I, J, K **действуют на векторах** $\pm e_i$ **перестановками** (допишите это действие самостоятельно).

Шаг 3: Рассмотрим кэлеровы формы, связанные с I, J, K: ω_I, ω_J, ω_K. Они очень просто записываются в этом базисе: $\omega_I = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$, $\omega_J = e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$, $\omega_K = e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3$. Это дает $\omega_J + \sqrt{-1}\,\omega_K = z_1 \wedge z_2$. Мы получили сечение канонического расслоения. Поскольку $\nabla\Omega = 0$, **это сечение имеет постоянную длину, голоморфно, и метрика** g **риччи-плоская.** ■

Гиперкэлеровы структуры на K3-поверхности: существование и единственность

ТЕОРЕМА: Пусть (M,I) – K3-поверхность, $[\omega]\in H^2(M,\mathbb{R})$ ее кэлеров класс, Ω – голоморфная симплектическая форма. Предположим, что $\operatorname{Re}\Omega^2=[\omega]^2$. Тогда **на (M,I) существует и единственна гиперкэлерова структура, такая, что $[\omega_I]=[\omega]$, $\omega_J=\operatorname{Re}\Omega$, $\omega_K=\operatorname{Im}\Omega$.**

Доказательство. Шаг 1: Выберем риччи-плоскую метрику g в том же кэлеровом классе. Она существует и единственна (Калаби-Яу). **Гиперкэлерова метрика должна быть риччи-плоской,** что доказывает единственность такой метрики.

Шаг 2: Рассмотрим ω_I, ω_J, ω_K как гомоморфизмы из TM в T^*M. Тогда $\omega_I\circ\omega_J^{-1}=K$, $\omega_J\circ\omega_K^{-1}=I$, $\omega_K\circ\omega_I^{-1}=J$ (проверьте это). Значит, **гиперкэлерова структура единственным образом определяется тремя симплектическими формами.** Теперь, единственность гиперкэлеровой структуры на M следует из шага 1.

Шаг 3: Запишем $\omega_J=\operatorname{Re}\Omega$, $\omega_K=\operatorname{Im}\Omega$, и выразим I,J,K через эти операторы, как указано в шаге 2. Кватернионные соотношения следуют из приведенного выше вычисления. Кэлеровость I,J,K очевидна, потому что **эти операторы параллельны.** ■

Отображение периодов для гиперкэлеровых структур

ЗАМЕЧАНИЕ: Для гиперкэлеровой структуры на поверхности, $\int_M \omega_I \wedge \omega_J = \int \omega_I \wedge \omega_K = \int \omega_J \wedge \omega_K = 0$, $\int_M \omega_I^2 = \int_M \omega_J^2 = \int_M \omega_K^2$ **(проверьте это).** Назовем базис, удовлетворяющий этим условиям, **конформно ортонормальным**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Группа изотопий** $\mathrm{Diff}_0(M)$ многообразия M есть связная компонента группы диффеоморфизмов M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство Тейхмюллера** $\mathrm{Teich}_{hk}(M)$ гиперкэлеровых структур есть фактор пространства всех гиперкэлеровых структур на M по $\mathrm{Diff}_0(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за $\mathrm{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$ пространство конформно ортонормированных троек классов $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in H^2(M,\mathbb{R})$. **Отображение периодов** $\mathrm{Teich}_{hk}(M) \stackrel{\mathcal{P}\mathrm{er}}{\to} \mathrm{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$ переводит гиперкэлерову структуру I, J, K, g в тройку $\omega_I, \omega_J, \omega_K \in \mathrm{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$

Сейчас будет доказана такая теорема.

ТЕОРЕМА: Пусть M - K3-поверхность. Тогда **образ** $\mathrm{Teich}_{hk}(M) \stackrel{\mathcal{P}\mathrm{er}}{\to} \mathrm{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$ **открыт в** $\mathrm{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$.

Деформации кэлеровых структур

ЗАМЕЧАНИЕ: На любом комплексном многообразии, форма ω кэлерова, если она типа $(1,1)$, замкнута, и удовлетворяет $\omega(x, Ix) > 0$ для всех ненулевых $x \in T_m M$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M, I, ω) – компактное кэлерово многообразие, а $\operatorname{Kah}(M) \subset H^{1,1}(M)$ – кэлеров конус (множество кэлеровых классов). Введем на $H^2(M)$ евклидову метрику E. Тогда **существует $\varepsilon_g > 0$ такое, что ε-шар $B := B_{E,\varepsilon_g}([\omega])$ с центром в ω содержится в $\operatorname{Kah}(M)$.** Более того, ε_g непрерывно зависит от g, I и их производных.

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим следующую функцию на $H^{1,1}(M)$: для каждого класса когомологий $[\eta]$ выбирается гармоничный представитель η_h. Обозначим за $S([\eta])$ супремум

$$S([\eta]) := \sup_M \frac{|\eta_h(x, Ix)|}{\omega(x, Ix)}.$$

Пусть $C := \sup_{[\eta] \in B} S([\eta])$, где B есть единичный шар в $(H^{1,1}(M), E)$. Тогда **все собственные значения гармонических представителей всех классов из B ограничены C.**

Шаг 2: Значит, для любого $\eta \in B$, все собственные значения $C\omega + \eta_h$ положительны, и **эта форма кэлерова**.

Деформации кэлеровых структур (продолжение)

Шаг 2: Значит, для любого $\eta \in B$, все собственные значения $C\omega + \eta_h$ положительны, и **эта форма кэлерова**.

Шаг 3: Значит, для любого η в шаре радиуса $\leqslant 1/C$ с центром в $[\omega]$, форма $\eta_h + \omega$ кэлерова. **Это доказывает открытость кэлерова конуса в $H^{1,1}(M, \mathbb{R})$.**

Шаг 4: В качестве ε_g можно выбрать $\frac{1}{C}$, а C непрерывно зависит от g в силу свойств гармонической проекции. ■

Образ отображения периодов для гиперкэлеровых структур

ТЕОРЕМА: Пусть M - K3-поверхность. **Тогда образ** $\mathsf{Teich}_{hk}(M) \stackrel{\mathcal{P}\mathsf{er}}{\to} \mathsf{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$ **открыт в** $\mathsf{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$.

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим ортогональное дополнение $\langle\omega_J,\omega_K\rangle^\perp \subset H^2(M,\mathbb{R})$. Тогда

$$\langle\omega_J,\omega_K\rangle^\perp = H^{1,1}(M,I).$$

В самом деле, $\int \eta\wedge\Omega = 0$ для любой (1,1)-формы η **(а почему?)**, а $\dim\langle\omega_J,\omega_K\rangle^\perp = \dim h^{1,1}(M)$ **(проверьте)**.

Шаг 2: Каждый кэлеров класс $[\omega]\in H^{1,1}(M,I)$, удовлетворяющий

$$\int_M [\omega]^2 = \int_M \operatorname{Re}\Omega^2,$$

является классом ω_I для какой-то гиперкэлеровой структуры, в силу доказанного выше.

Образ отображения периодов для гиперкэлеровых структур (продолжение)

Шаг 3: Значит, $\mathcal{P}\mathrm{er}(\mathrm{Teich}_{hk}(M))$ вместе с каждой тройкой $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathrm{St}^c_3(H^2(M,\mathbb{R}))$ содержит множество всех троек вида $\omega'_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathrm{St}^c_3(H^2(M,\mathbb{R}))$, для всех $\omega'_1 \in S$, где $S \subset \langle\omega_2, \omega_3\rangle^\perp$ – пересечение $\mathrm{Kah}(M,I)$ и сферы радиуса $\int_M \omega_1^2$.

Шаг 4: Пусть $\pi : \ X \to Y$ – локально-тривиальное гладкое расслоение многообразий. Назовем **расслоением** такое подмножество $U \subset X$, что все слои отображения $\pi : \ U \to \pi(Y)$ открыты в слоях π, причем для каждой точки U найдется окрестность $U' \subset U$, которая локально-тривиально расслоена над $\pi(U')$. Мы доказали, что **забывающая проекция $\mathcal{P}\mathrm{er}(\mathrm{Teich}_{hk}(M)) \to \mathrm{St}^c_2(H^2(M,\mathbb{R}))$ – расслоение.**

Шаг 5: Теперь утверждение теоремы сводится к следующему геометрическому наблюдению:

ЛЕММА: Пусть V – вещественное векторное пространство с невырожденным скалярным произведением, а $\mathrm{St}_k(V)$ – многообразие ортонормированных k-реперов. Рассмотрим отображения забывания $\mathrm{St}_k(V) \to \mathrm{St}_{k-1}(V)$ (их k штук: $\pi_1, ..., \pi_k$). Пусть $U \subset \mathrm{St}_k(V)$ – какое-то подмножество, такое, что $\pi_i|_U$ – расслоение для всех i. **Тогда U открыто в $\mathrm{St}_k(V)$.**

Образ отображения периодов для гиперкэлеровых структур: простая геометрическая лемма

ЛЕММА: Пусть V – вещественное векторное пространство с невырожденным скалярным произведением, а $\mathrm{St}_k(V)$ – многообразие ортонормированных k-реперов. Рассмотрим отображения забывания $\mathrm{St}_k(V) \to \mathrm{St}_{k-1}(V)$ (их k штук: $\pi_1, ..., \pi_k$). Пусть $U \subset \mathrm{St}_k(V)$ – какое-то подмножество, такое, что $\pi_i|_U$ – расслоение для всех i. **Тогда U открыто в $\mathrm{St}_k(V)$.**

Доказательство. Шаг 1: Зафиксируем первую компоненту v_1 репера, и пусть $U(v_1)$ – все реперы из U, у которых первая компонента равна v_1. Тогда $U(v_1) \subset \mathrm{St}_{k-1}(v_1^\perp)$ удовлетворяет условиям леммы, и **по индукции можно считать его открытым.**

Шаг 2: Рассмотрим композицию двух забываний, $\mathrm{St}_k(V) \stackrel{\pi_{ij}}{\to} \mathrm{St}_{k-2}(V)$. Слой $\pi_{ij}|_U$ - реперы из U, у которых зафиксированы все компоненты $v_1, ..., v_n$, кроме i-й и j-й. В силу предыдущего шага, это открытое подмножество в $\mathrm{St}_2(W)$, где W – ортогональное дополнение к $v_1, ..., \check{v}_i, ..., \check{v}_j, ..., v_n$.

Шаг 3: Рассмотрим пространство $U_1 := \pi_i(U)$. В силу предыдущего шага, $\pi_j : \ U_1 \to \pi_j(U_1)$ **есть расслоение,** значит, $U_1 \subset \mathrm{St}_{k-1}(V)$ удовлетворяет условиям леммы, и можно считать его открытым в $\mathrm{St}_{k-1}(V)$. **Поскольку U расслоено над U_1 с открытыми слоями, оно тоже открыто.** ■

Классификация форм пересечения (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симметричная билинейная форма η на $V := \mathbb{Z}^n$ называется **унимодулярной**, если она задает изоморфизм $V \to V^*$, **четной**, если множество всех $\eta(x,x)$ содержится в $2 \cdot \mathbb{Z}$, и **нечетной** если нет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симметричная 2-форма η называется **неопределенной**, если $\eta(x,x) < 0$ и $\eta(y,y) > 0$ для каких-то x и y.

ТЕОРЕМА:
(классификация унимодулярных симметричных билинейных форм): Пусть q – четная унимодулярная неопределенная форма на V. **Тогда** (V,q) **разлагается в ортогональную прямую сумму** подпространств с билинейной формой, которая имеет вид $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (такие пространства называются "гиперболическими"), и подпространств $E_{\pm 8}$, изоморфных решетке пересечения корней алгебры E_8:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

или такой же решетке с формой пересечения противоположного знака.

Форма пересечения для K3-поверхности

ЛЕММА: Пусть η – нечетная форма пересечения на $V := \mathbb{Z}^n$, а $P := \mathbb{P}(V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})$ – соответствующее проективное пространство. Обозначим за R множество нечетных векторов $r \in V$. Тогда образ $\pi(R)$ в P плотен.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $s \in V$ – любой вектор. Для доказательства плотности R в P **достаточно найти элемент из $\pi(R)$ в любой окрестности $\pi(S)$.**

Шаг 2: Пусть $r_0 \in R$. Последовательность $r_0 + 2Ns$ состоит из нечетных векторов, а ее образ в P сходится к s. ■

ТЕОРЕМА: Форма пересечения K3-поверхности M четная.

Доказательство. Шаг 1: В силу доказанного выше, множество K кэлеровых форм M открыто в $H^2(M,\mathbb{R})$. Значит, его проективизация $\mathbb{P}K$ открыта в $\mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$.

Шаг 2: Если форма пересечения $H^2(M,\mathbb{Z})$ нечетна, в силу предыдущей леммы, найдется нечетный целочисленный класс r с $\pi(r) \in \mathbb{P}K$. Тогда $r \in H^{1,1}(M,\mathbb{Z})$, значит, **существует голоморфное расслоение L с $c_1(L) = r$.** Но $\chi(L) = 2 + \frac{1}{2}\int_M r \wedge r$ по формуле Римана-Роха. Значит, **самопересечение r четно.** ■