Комплексные поверхности,

лекция 9: K3, квадрики, решетки, потоки на многообразиях

Миша Вербицкий

НМУ/матфак ВШЭ, Москва

9 апреля 2012

К3-поверхности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **К3-поверхность** есть комплексная поверхность с $b_1 = 0$ и $c_1 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Все поверхности с $b_1 = 0$ - кэлеровы** (Бухсдаль-Ламари).

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Каноническое расслоение K_M тривиально.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Теорема Римана-Роха дает $\chi(\mathcal{O}_M) = 2 = \frac{c_2(M)}{12}$, значит, $c_2(M) = 24$. Поскольку $c_2(M)$ есть эйлерова характеристика M, получаем $b_2(M) = 22$.

Это дает ромб Ходжа для К3-поверхности:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 0 & & 0 & \\
1 & & 20 & & 1 \\
 & 0 & & 0 & \\
 & & 1 & &
\end{array}
$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Когомологии К3 не имеют кручения.**

Пространство периодов для K3-поверхности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\operatorname{Comp}(M)$ есть множество всех интегрируемых почти комплексных структур на многообразии, с топологией, индуцированной топологией Фреше на пространстве тензоров. **Пространство Тейхмюллера** $\operatorname{Teich}(M)$ комплексных структур есть факторпространство $\operatorname{Comp}(M)/\operatorname{Diff}_0(M)$, где $\operatorname{Diff}_0(M)$ есть **группа изотопий** (связная компонента группы диффеоморфизмов).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M есть K3-поверхность. **Отображение периодов** $\operatorname{Teich}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{C})$ сопоставляет каждой комплексной структуре I на M прямую $H^{2,0}(M,I) \subset H^2(M,\mathbb{C})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство периодов** K3-поверхности есть пространство $\mathbb{P}\mathrm{er} \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{C})$ состоящее из всех прямых $\mathbb{C}\cdot l$ таких, что $l \wedge l = 0$ и $l \wedge \bar{l} > 0$. **Отображение периодов** есть отображение $\operatorname{Teich}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} \mathbb{P}\mathrm{er}$.

Основной результат прошлой лекции:

ТЕОРЕМА: **(Локальная теорема Торелли для K3)** **Отображение периодов $\operatorname{Teich}(M) \xrightarrow{\mathcal{P}\mathrm{er}} \mathbb{P}\mathrm{er}$ этально, т.е. задается гомеоморфизмом в окрестности каждой точки $I \in \operatorname{Teich}(M)$.**

Пространство периодов и $++$-грассманиан (повторение)

Пусть V – вещественное векторное пространство, снабженное скалярным произведением q. Обозначим за $\mathbb{P}\mathrm{er}(V)$ множество прямых $l \in \mathbb{P}V_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих $q(l,l) = 0$ и $q(l,\bar{l}) > 0$, и пусть $\mathrm{Gr}_{+,+}(V)$ – пространство ориентированных 2-мерных плоскостей $W \subset V$, таких, что $q|_W$ положительно определено.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для каждого $W \in \mathrm{Gr}_{+,+}(V)$, рассмотрим оператор поворота на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки: $I_W : W \to W$. Обозначим за $P(W) \in \mathbb{P}V_{\mathbb{C}}$ прямую, порожденную $x + \sqrt{-1}\, I_W(x)$, для $x \in W$. Тогда **P задает биекцию $P : \mathrm{Gr}_{+,+}(V) \to \mathbb{P}\mathrm{er}(V)$.**

СЛЕДСТВИЕ: Пространство периодов для K3-поверхности изоморфно $SO(19,3)/SO(2) \times SO(19,1)$.

Гладкие квартики (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гладкой квартикой** называется гладкая гиперповерхность в $\mathbb{C}P^n$, заданная неприводимым однородным полиномом степени 4.

ЗАМЕЧАНИЕ: По формуле Эйлера, каноническое расслоение на $\mathbb{C}P^n$ есть $\mathcal{O}(-n-1)$. Формула присоединения, примененная к гладкой поверхности $Z \subset \mathbb{C}P^n$ степени m, дает $N^*Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} K_Z = K_{\mathbb{C}P^n}|_Z$, а коль скоро $N^*Z = \mathcal{O}(-m)$ и $K_{\mathbb{C}P^n} = \mathcal{O}(-n-1)$, **имеем** $K_Z = \mathcal{O}(m-n-1)$**.**

СЛЕДСТВИЕ: Для гладкой квартики в $\mathbb{C}P^3$, $n = 3$, $m = 4$, значит $K_Z = \mathcal{O}_Z$. Поэтому **гладкая квартика есть поверхность с тривиальным каноническим классом.**

ЗАМЕЧАНИЕ: В дальнейшем, говоря про "гладкие квартики", **я буду подразумевать квартики размерности 2.**

ТЕОРЕМА: **Гладкая двумерная квартика является K3-поверхностью**.

Пространство $H^{1,1}(M,\mathbb{Z})$ и линейные расслоения (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Группа Нерона-Севери** $NS(M)$ многообразия M есть образ $\operatorname{Pic}(M)$ в $H^2(M,\mathbb{Z})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за $H^{1,1}(M,\mathbb{Z})$ **множество целочисленных классов когомологий, которые лежат в $H^{1,1}(M)$.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Если группа $H^2(M,\mathbb{Z})$ – без кручения, то $NS(M) = H^{1,1}(M,\mathbb{Z})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M,I) есть K3-поверхность, а $W := \mathcal{P}\mathrm{er}(I) \in G_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$. **Тогда $H^{1,1}_I(M,\mathbb{R}) = W^\perp$** (ортогональное дополнение).

СЛЕДСТВИЕ: Для любой K3, $\operatorname{Pic}(M,I) = NS(M,I) = H^{1,1}_I(M,\mathbb{Z})$ – **множество целочисленных векторов, ортогональных $W = \mathcal{P}\mathrm{er}(I) \in G_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$.**

СЛЕДСТВИЕ: Для общей K3-поверхности, **группа $\operatorname{Pic}(M,I)$ тривиальна.**

K3-поверхности с одномерной группой Пикара (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I) есть K3-поверхность, причем группа $\operatorname{Pic}(M, I) = NS(M, I) = H^{1,1}_I(M, \mathbb{Z})$ одномерна, $NS(M, I) = \mathbb{Z} \cdot \eta$. Обозначим за L образующую $\operatorname{Pic}(M, I)$, $c_1(L) = \eta$. Предположим, что $(L, L) > 0$. **Тогда L либо L^* обильно.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M, I) – K3-поверхность, $H^{1,1}_I(M, \mathbb{Z})$ – ее решетка Нерона-Севери. **Поверхность (M, I) изоморфна квартике тогда и только тогда, когда $\operatorname{Pic}(M, I) = H^{1,1}_I(M, \mathbb{Z})$ содержит очень обильное расслоение L с $(L, L) = 4$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Базисная точка** линейного расслоения есть такая точка, где все его сечения зануляются. Расслоение **не имеет базисных точек**, если оно глобально порождено.

ТЕОРЕМА: Пусть M – K3-поверхность, $\operatorname{Pic}(M) = \mathbb{Z}$, а L – образующая группы Пикара, такая, что $(L, L) = 4$. **Тогда L либо $-L$ обильно и глобально порождено.**

Пространство Тейхмюллера квартик (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\eta \in H^2(M,\mathbb{Z})$ – ненулевой класс когомологий на K3, $(\eta,\eta) > 0$. Обозначим за $\mathbb{P}\mathrm{er}_\eta$ множество $W \in \mathrm{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$, ортогональных η. Это пространство называется **пространство периодов поляризованных K3**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\eta \in H^2(M,\mathbb{Z})$ есть целочисленный класс на K3, $(\eta,\eta) = 4$. Обозначим за Teich_η^q пространство Тейхмюллера всех $I \in \mathrm{Teich}_\eta$ таких, что линейное расслоение L на (M,I) с $c_1(L) = \eta$ обильно и глобально порождено. Пространство Teich_η^q называется **пространством Тейхмюллера квартик**.

ТЕОРЕМА: Teich_η^q **плотно в** Teich_η**.**

СЛЕДСТВИЕ: По соображениям размерности, **пространство** Teich_η^{sq} **всех** $I \in \mathrm{Teich}_\eta^q$ **таких, что** (M,I) **– гладкая квартика, также плотно в** Teich_η**.**

О плотности квартик (повторение)

ТЕОРЕМА: (будет доказана позже)
Пусть $\mathfrak{R} \subset H^2(M, \mathbb{Z})$ – множество всех векторов v таких, что $(v, v) = 4$. **Тогда $\bigcup_{\eta \in \mathfrak{R}} \mathbb{P}\mathrm{er}_\eta$ плотно в $\mathbb{P}\mathrm{er}$.**

СЛЕДСТВИЕ: $\bigcup_{\eta \in \mathfrak{R}} \mathrm{Teich}_\eta^q$ плотно в Teich.

СЛЕДСТВИЕ: Поскольку гладкие квартики плотны в пространстве $\mathrm{Sym}^4 \mathbb{C}^4 / GL(\mathbb{C}, 4)$ всех квартик, **на каждой компоненте Teich_η^q есть плотное множество комплексных структур, соответствующих гладким квартикам.**

ТЕОРЕМА: На пространстве Тейхмюллера K3 есть плотное множество точек, соответствующих гладким квартикам.

Поскольку гладкие квартики образуют связное, гладкое семейство, они все диффеоморфны.

СЛЕДСТВИЕ: Любая K3 диффеоморфна гладкой квартике.

Решетки и квадрики

Теорема 1: Пусть $\mathfrak{R} \subset H^2(M,\mathbb{Z})$ – множество всех векторов v таких, что $(v,v)=4$. **Тогда $\bigcup_{\eta\in\mathfrak{R}} \mathbb{P}\mathrm{er}_\eta$ плотно в $\mathbb{P}\mathrm{er}$.**

Другая формулировка

Теорема 2: Пусть $\mathfrak{R} \subset H^2(M,\mathbb{Z})$ – множество всех векторов v таких, что $(v,v)=4$, а $W_{\mathfrak{R}} \subset \mathrm{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$ – множество всех 2-плоскостей, ортогональных какому-то $v\in\mathfrak{R}$. **Тогда $W_{\mathfrak{R}}$ плотно в $\mathrm{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Нуль-квадрика**, или же **световой конус** $\mathrm{Null}(M) \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$ есть множество всех $l\in\mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$, $(l,l)=0$.

Плотные множества в $\operatorname{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$

Пусть $A \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$ – подмножество. Обозначим за $V(A)$ множество 2-плоскостей, ортогональных какому-то $v \in A$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $B \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$ – множество предельных точек $A \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$, а $V(B)$ плотно в $\operatorname{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$, то $V(A)$ плотно в $\operatorname{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $V(\operatorname{Null}(M)) = \operatorname{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$. Действительно, для каждой 2-плоскости в $H^2(M,\mathbb{R})$, в ее ортогональном дополнении есть нуль-вектор.

Объединяя эти два замечания, получаем, что Теорема 2 следует из Теоремы 3.

Теорема 2: Пусть $\mathfrak{R} \subset H^2(M,\mathbb{Z})$ – множество всех векторов v таких, что $(v,v) = 4$, а $W_{\mathfrak{R}} \subset \operatorname{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$ – множество всех 2-плоскостей, ортогональных какому-то $v \in \mathfrak{R}$. **Тогда $W_{\mathfrak{R}}$ плотно в $\operatorname{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$.**

Теорема 3:
Множество предельных точек $\mathbb{P}\mathfrak{R} \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$ содержит $\operatorname{Null}(M)$.

Плотные множества в световом конусе

Теорема 3’: Любая точка $x \in \operatorname{Null}(M) \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$ является пределом последовательности $\{\underline{x_i}\} \in \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{Z})$, причем каждый $\underline{x_i}$ представлен $x_i \in H^2(M,\mathbb{Z})$, $(x_i, x_i) = 4$.

Доказательство. Шаг 1: Рациональные точки плотны в $\operatorname{Null}(M)$. Действительно, как минимум одна рациональная точка в $\operatorname{Null}(M)$ имеется; обозначим ее за r. Возьмем любую рациональную прямую $S \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$, проходящую через r. **Поскольку одна из точек пересечения $S \cap \operatorname{Null}(M)$ рациональна, другая тоже рациональна.**

Шаг 2: Вектор $v \in H^2(M,\mathbb{Z})$ называется **примитивным**, если он порождает $(\mathbb{R} \cdot v) \cap H^2(M,\mathbb{Z})$. Поскольку решетка $H^2(M,\mathbb{Z})$ унимодулярна, **для любого примитивного вектора $v \in H^2(M,\mathbb{Z})$ существует $v' \in H^2(M,\mathbb{Z})$ такой, что $(v, v') = 1$.**

Шаг 3: Обозначим за $\mathfrak{S}$ множество примитивных целых нуль-векторов. В силу шага 1, $\mathbb{P}\mathfrak{S}$ плотно в $\operatorname{Null}(M)$. Пусть $v \in \mathfrak{S}$. **Осталось найти последовательность $x_i \in H^2(M,\mathbb{Z})$ такую, что проективизации $\{\mathbb{P}x_i\}$ сходятся к $\mathbb{P}v$, а $(x_i, x_i) = 4$.**

Плотные множества в световом конусе (продолжение)

Шаг 3: Обозначим за $\mathfrak{S}$ множество примитивных целых нуль-векторов. В силу шага 1, $\mathbb{P}\mathfrak{S}$ плотно в $\operatorname{Null}(M)$. Пусть $v \in \mathfrak{S}$. **Осталось найти последовательность $x_i \in H^2(M,\mathbb{Z})$ такую, что проективизации $\{\mathbb{P}x_i\}$ сходятся к $\mathbb{P}v$, а $(x_i, x_i) = 4$.**

Шаг 4: Найдем $x \in H^2(M,\mathbb{Z})$ такой, что $(v,x) = 1$, и пусть $y \in H^2(M,\mathbb{Z})$ – любой целочисленный вектор с ненулевым квадратом, ортогональный v и x. Если $u = \lambda v+x+\mu y$, то $(u,u) = 2\lambda+x^2+\mu^2y^2$. Напишем $\lambda(\mu) = -1/2(x^2+\mu^2y^2-4)$. Тогда $u(\mu) := \lambda(\mu)v+x+\mu y$ – целочисленный вектор (форма пересечения четна), причем $(u(\mu),u(\mu)) = 4$. **Осталось доказать, что $\lim_{\mu\to\infty}\mathbb{P}u(\mu) = \mathbb{P}v$.**

Шаг 5: Выберем на $H^2(M,\mathbb{R})$ положительно-определенную метрику g, таким образом, что $g(x,x) = g(y,y) = x(v,v) = 1$, обозначим за $|\cdot|$ соответствующую норму, $|z| := g(z,z)^{1/2}$. Тогда $|u(\mu)-\lambda(\mu)v| \leqslant 1+|\mu|$, а $|\lambda(\mu)v| \geqslant |1/2\mu^2y^2| - x^2 - 4$. Получается, что со стремлением μ к бесконечности, в треугольнике $0, u(\mu), \lambda(\mu)v$ сторона $(0,\lambda(\mu)v)$ растет квадратично по μ, сторона $(u(\mu),\lambda(\mu)v)$ линейно, соответственно, **угол между противолежащими к $(u(\mu),\lambda(\mu)v)$ сторонами стремится к нулю.** Мы доказали, что $\mathbb{P}v$ получено как предел целочисленных $\mathbb{P}u(\mu)$, удовлетворяющих $(u(\mu),u(\mu)) = 4$. ■

Пространства Фреше (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Локально выпуклое топологическое векторное пространство** это топологическое векторное пространство, базу топологии которого составляют выпуклые множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Рассмотрим векторное пространство, снабженное набором полунорм $|\cdot|_i$, $i = 0, 1, 2, ...$ и топологией, которая задана метрикой вида $d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \max(|x - y|_i, 2^{-i})$. Такое пространство называется **пространством Фреше**, если эта метрика полна (т.е. любая последовательность Коши в этой метрике сходится).

ЗАМЕЧАНИЕ: Последовательность точек сходится в топологии Фреше тогда и только тогда, когда она сходится во всех нормах $|\cdot|_i$, а базой топологии Фреше будут бесконечные пересечения ε-шаров вида $\bigcap_{i=0}^{\infty} B_x(\varepsilon_i, |\cdot|_i)$, во всех нормах $|\cdot|_i$ **(докажите это).**

Топология Фреше на пространстве гладких функций

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M - гладкое многообразие. Введем на M метрику, и пусть $\nabla^i: C^\infty(M) \to \Lambda^1()^{\otimes i}$ - отображение, ставящее в соответствие функции ее i-ю производную (здесь ∇ обозначает связность Леви-Чивита). Определим на пространстве функций с компактным носителем **топологию C^k,** заданную нормой

$$|\varphi|_{C^k} := \sup_M \sum_{i=0}^k |\nabla^i \varphi|.$$

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **топология C^k не зависит от выбора метрики на M.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство тест-функций** – это пространство функций с компактным носителем, с топологией, заданной набором норм $|\cdot|_{C^i}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Последовательность $\{a_i\}$ сходится в топологии пространства тест-функций тогда и только тогда, когда она сходится во всех $|\cdot|_{C^i}$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что это пространство Фреше. Докажите, что **топология на пространстве тест-функций не зависит от выбора метрики на M.**

Обобщенные функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обобщенной функцией (распределением) называется функционал на пространстве функций с компактным носителем, непрерывный в одной из топологий C^i. На пространстве распределений задана **слабая топология**, это слабейшая топология, в которой спаривание с пространством тест-функций непрерывно.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **слабая топология на обобщенных функциях локально выпукла.**

ПРИМЕР: Дельта-функция δ_t – функционал, ставящий φ в соответствие $\varphi(t)$, где $t \in M$ – точка. Легко видеть, что дельта-функция непрерывна в топологии C^0. Ее производная непрерывна в C^1, и так далее.

Потоки на многообразиях

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M - многообразие, B - расслоение. Введем метрику на M и связность с метрикой на B. Формула $|\varphi|_{C^k} := \sup_M \sum_{i=0}^k |\nabla^i \varphi|$ задает норму C^i на пространствах сечений B с компактным носителем. Рассуждая, как для функций, мы строим **топологию Фреше** на пространстве сечений, и проверяем, что она не зависит от выбора метрики.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **(p,q)-потоком** на комплексном n-мерном многообразии называется функционал на пространстве $\Lambda_c^{n-p,n-q}(M)$ $(n-p,n-q)$-форм с компактным носителем, непрерывный в одной из C^i-топологий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство тест-форм типа (p,q)** на комплексном многообразии это пространство (p,q)-форм с компактным носителем, снабженное структурой пространства Фреше, определенной по нормам C^i.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Потоки суть функционалы на $\Lambda_c^{n-p,n-q}(M)$, непрерывные в топологии тест-форм.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Также **потоки можно рассматривать как (p,q)-формы с коэффициентами в обобщенных функциях.**

Когомологии потоков

ЗАМЕЧАНИЕ: Гладкую (p,q)-форму ψ можно интерпретировать как (p,q)-поток: для любой тест-формы $\alpha \in \Lambda_c^{n-p,n-q}(M)$, рассмотрим функционал $\alpha \to \int_M \psi \wedge \alpha$. **Это задает вложение $\Lambda^{p,q}(M) \hookrightarrow \mathcal{D}^{p,q}(M)$ из форм в потоки.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, **что пространство потоков – это пополнение $\Lambda^{p,q}(M)$** в слабейшей топологии, в которой спаривание с пространством тест-форм непрерывно.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку **дифференцирование вдоль векторного поля непрерывно в топологии потоков (проверьте это),** на пространстве потоков определен дифференциал де Рама, продолженный по непрерывности из пространства форм, а также дифференциалы Дольбо ∂ и $\bar\partial$. В квадрате эти дифференциалы равны нулю **(проверьте).** Это позволяет определить когомологии де Рама и Дольбо потоков.

Когомологии потоков (продолжение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: В пространстве потоков **имеет место лемма Пуанкаре** (о том, что когомологии дифференциала де Рама порождены постоянными функциями) и Дольбо (о том, что **когомологии дифференциала Дольбо $\overline{\partial}$ равны голоморфным функциям**).

ЗАМЕЧАНИЕ: Из лемм Пуанкаре и Дольбо сразу следует, что потоки являются ацикличными резольвентами к константам и к голоморфным функциям, а значит **их когомологии равны обычным когомологиям де Рама и Дольбо.**

УПРАЖНЕНИЕ: Выведите из этого, что **образ ∂, d и $\overline{\partial}$ замкнут в пространстве потоков на компактном многообразии.**

Положительные (1,1)-формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Положительная $(1,1)$-форма** – это вещественная (1,1)-форма α, удовлетворяющая $\alpha(x, Ix) \geqslant 0$, для любого вещественного векторного поля x.

ЗАМЕЧАНИЕ: Локально, положительную (1,1)-форму можно представить в виде $\alpha = \sum_i \sqrt{-1}\, \alpha_i dz_1 \wedge d\bar{z}_i$, где dz_i - базис в $\Lambda^{0,1}(M)$, а $\alpha_i \geqslant 0$ – вещественные функции **(проверьте это)**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Выпуклым конусом** в векторном пространстве V называется подмножество $A \subset V$, удовлетворяющее следующим свойствам.
1. $\forall x, y \in A$, их сумма тоже лежит в A.
2. $\forall x \in A, \lambda \in \mathbb{R}^{>0}$, λx также лежит в A.

ЗАМЕЧАНИЕ: Положительные $(1,1)$-формы образуют выпуклый конус в пространстве вещественных (1,1)-форм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M - комплексное, n-мерное многообразие. $(n-1, n-1)$-поток η называется **положительным** если $\int_M \eta \wedge \alpha \geqslant 0$ для любой положительной $(1,1)$-формы,

Теорема Хана-Банаха

ТЕОРЕМА: (Теорема Хана-Банаха) Пусть V - топологическое векторное пространство, $A \subset V$ - открытый выпуклый конус, не содержащий 0, $W \subset V$ - замкнутое подпространство, а θ_W - непрерывный линейный функционал на W, положительный на $W \cap A$. **Тогда на V существует непрерывный линейный функционал θ, такой, что $\theta|_A > 0$, а $\theta|_W = \theta_W$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В следующей лекции, если слушатели пожелают. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Строго положительная (1,1)-форма — форма, лежащая во внутренности положительного конуса.

ЗАМЕЧАНИЕ: Многообразие называется кэлеровым, если на нем существует строго положительная, замкнутая форма. Это одно из определений.

ЗАМЕЧАНИЕ: Иначе говоря, **кэлеровость равносильна тому, что открытый конус A строго положительных форм пересекается с линейным пространством W замкнутых форм.**

Замкнутые потоки

УТВЕРЖДЕНИЕ: Если поток θ, заданный на компактном многообразии, зануляется на замкнутых формах, то он точен.

Доказательство. Шаг 1: Действительно,

$$0 = \int_M \theta \wedge d\alpha = (-1)^{\deg\theta} \int_M d\theta \wedge \alpha,$$

значит, $d\theta$ **зануляется на любой тест-форме, значит, он равен нулю.**

Шаг 2: Класс когомологий θ равен нулю, потому что **для ненулевого класса когомологий существует замкнутая форма α с $\int_M \theta \wedge \alpha \neq 0$** (в силу двойственности Пуанкаре). ■

Потоки, зануляющиеся на замкнутых (1,1)-формах

ЛЕММА: Пусть M – компактное комплексное n-мерное многообразие, а θ – $(n-1, n-1)$-поток, который зануляется на замкнутых $(1,1)$-формах. **Тогда θ – $(n-1, n-1)$-часть точного потока $\tilde{\theta}$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть V – пространство 2-форм, с топологией Фреше. Пространство (1,1)-форм замкнуто в V, пространство замкнутых форм тоже замкнуто. Пусть W – подпространство в V, порожденное замкнутыми формами и $(1,1)$-формами. Оно замкнуто. Определим функционал θ_1 на W так: на $(1,1)$-формах $\theta_1 = \theta$, на замкнутых формах $\theta_1 = 0$.

Шаг 2: Применим теорему Хана-Банаха к W, построенному выше, и пустому A. Тогда θ_1 продолжается до функционала $\tilde{\theta}$ на V. **По построению $\tilde{\theta}$ зануляется на замкнутых 2-формах, значит, в силу предыдущего утверждения он точен.** ■

Теорема Харви-Лоусона

ТЕОРЕМА: (Харви-Лоусон, 1983)
Пусть M – компактное комплексное многообразие. Тогда следующие утверждения равносильны. (а) M не допускает кэлеровой метрики. (б) На M существует ненулевой положительный $(n-1,n-1)$-поток, который является $(n-1,n-1)$-частью точного.

Доказательство. Шаг 1: Пусть V - пространство вещественных $(1,1)$-форм на M, с топологией пространства Фреше, $A \subset V$ – строго положительные $(1,1)$-формы, а $W \subset V$ – пространство замкнутых $(1,1)$-форм. Если M не кэлерово, то $A \cap W = \emptyset$. По теореме Хана-Банаха **существует непрерывный функционал θ на V, зануляющийся на W, и положительный на A.**

Шаг 2: Непрерывные функционалы на V – это $(n-1,n-1)$-потоки. **В силу предыдущей леммы, θ есть $(n-1,n-1)$-часть точного потока.**

Шаг 3: Если положительный поток θ на кэлеровом многообразии (M,ω) является $(n-1,n-1)$-частью точного потока, то $\int_M \theta\wedge\omega = 0$, но в этом случае $\theta = 0$ **(проверьте это).** ■