Комплексные поверхности 11: эллиптические операторы и принцип максимума

Задача 11.1. Пусть u – гладкая функция на компакте, удовлетворяющая $L(u) = u^3$, где L – эллиптический оператор второго порядка, зануляющийся на константах. Докажите, что $u = 0$.

Задача 11.2. Пусть L – эллиптический оператор второго порядка на компакте, зануляющийся на константах, а L^* – сопряженный эллиптический оператор. Предположим, что $\ker L^*$ одномерно, и порождено функцией u, которая где-то на M положительна, а где-то отрицательна. Найдите в $\operatorname{im} L$ ненулевую функцию, которая везде неотрицательна. Докажите, что таких функций не бывает.

Задача 11.3. Пусть L – эллиптический оператор второго порядка на компактном многообразии M с границей. "Проблема Лиувилля" состоит в поиске решений уравнения $L(u) = v$, где известно v и $u\big|_{\partial M}$. Докажите, что решение проблемы Лиувилля единственно, или приведите контрпример.

Задача 11.4. ("Непрерывность решения проблемы Лиувилля") В условиях предыдущей задачи, пусть $L(u_1) = v_1$, $L(u_2) = v_2$. Докажите, что есть оценка вида $\sup_M |u_1 - u_2| \leqslant \sup_{\partial M} |u_1 - u_2| + C$, где C – константа, которая зависит от M, L, и $v_1 - v_2$.

Задача 11.5. ("Проблема Нойманна") Пусть M – компактное многообразие с границей, а L – эллиптический оператор второго порядка. Докажите, что решение уравнения $L(u) = 0$ однозначно определяется функцией $\frac{\partial u}{\partial v}\big|_{\partial M}$, где $\frac{\partial}{\partial v}$ обозначает единичный нормальный вектор к ∂M.

Задача 11.6. ("Сильный принцип сравнения") Пусть M – компактное многообразие с границей, а L – эллиптический оператор второго порядка. Предположим, что $L(u) \geqslant L(v)$ на M, а $u \leqslant v$ на ∂M. Докажите, что $L(u) < L(v)$ во всех внутренних точках M, либо $u = v$.

Задача 11.7 (*). Пусть $R = \mathbb{Z}^n$ – решетка, а L – **дискретный оператор Лапласа**, переводящий функцию u на R в $L(u)(z) = \frac{1}{|C|}\sum_{z_i \in C} u(z_i) - u(z)$, где C – множество вершин решетки, отстоящих от z на 1. Пусть $u \in \ker L$. Докажите, что u не может иметь локального максимума на R.