Комплексные поверхности 12: построение метрики Годушона

Задача 12.1. Пусть M - риманово многообразие, $d: \Lambda^* M \longrightarrow \Lambda^* M$ дифференциал де Рама, а $d^* = - * d *$ сопряженный оператор. Докажите, что $d + d^*$ эллиптический. Найдите его индекс.

Задача 12.2. Пусть M - четырехмерное риманово многообразие, $\Lambda^+ M$ - пространство форм $v \in \Lambda^2 M$, удовлетворяющих $*v = v$, а

$$D\ \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^+ M \oplus C^\infty M$$

проекция $d + d^*(\Lambda^1 M)$ в $\Lambda^+ M \oplus C^\infty M$. Является ли D эллиптическим?

Задача 12.3. Пусть Φ - множество всех фредгольмовых операторов на гильбертовом пространстве, с топологией, которая задается нормой операторов. Пусть $F_1, F_2 \in \Phi$ операторы с одинаковым индексом. Докажите, что они лежат в одной и той же связной компоненте Φ.

Задача 12.4. Пусть M - риманово многообразие, а D - эллиптический оператор второго порядка на $C^\infty M$, зануляющийся на константах. Докажите, что есть метрика g на M и векторное поле v такое, что

$$D(f) = \pm \Delta f + \operatorname{Lie}_v f,$$

где $\operatorname{Lie}_v f$ - производная Ли вдоль v, а Δ - оператор Лапласа.

Задача 12.5. Пусть D – эллиптический оператор порядка i на 1-мерном вещественном расслоении. Докажите, что $\operatorname{ind} D = 0$. Для каких i существуют такие операторы?

Задача 12.6. Метрика ω на эрмитовом n-многообразии называется балансированной (balanced), если $d(\omega^{n-1}) = 0$. Приведите пример компактного комплексного многообразия, не допускающего такой метрики, для $n > 2$.