Комплексные поверхности 4: гиперкэлеровы структуры

Определение 4.1. Пусть $h \in \mathbb{H}$ – унитарный кватернион, а (M, I, J, K, g) – гиперкэлерово многообразие. Тогда $(M, hIh^{-1}, hJh^{-1}, hKh^{-1}, g)$ – тоже гиперкэлерово многообразие . Многообразия (M, I, J, K, g) и $(M, hIh^{-1}, hJh^{-1}, hKh^{-1}, g)$ называются **эквивалентными**.

Задача 4.1. Пусть (M, g) – 4-мерное риманово многообразие. Докажите, что любые две гиперкэлеровы структуры на (M, g) эквивалентны.

Задача 4.2. Пусть на 4-мерном многообразии заданы симплектические формы $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, удовлетворяющие $\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3 = \omega_2 \wedge \omega_3 = 0$ и $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_3^2$. Докажите, что есть гиперкэлерова структура, для которой $\omega_1 = \omega_I$, $\omega_2 = \omega_J$, $\omega_3 = \omega_K$.

Задача 4.3. Пусть на 4-мерном многообразии заданы симплектические формы $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, удовлетворяющие $\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3 = \omega_2 \wedge \omega_3 = 0$ и $\omega_1^2 = \omega_2^2 = -\omega_3^2$. Докажите, что на M существует связность ∇ без кручения, для которой $\nabla(\omega_1) = \nabla(\omega_2) = \nabla(\omega_3) = 0$.

Задача 4.4. Пусть на компактном 4-мерном многообразии задана гиперкомплексная структура, а η – точная, кватернионно-инвариантная 2-форма. Докажите, что $\eta = 0$.

Задача 4.5. Пусть (M, I, J, K) – гиперкэлерово многообразие кватернионной размерности 1, а $dd_J : C^\infty M \longrightarrow \Lambda^{1,1}(M, J)$, $dd_K : C^\infty M \longrightarrow \Lambda^{1,1}(M, K)$ – плюрилапласианы, связанные с комплексными структурами J, K.

а. Докажите, что для любой функции ϕ, выполнено $\omega_I \wedge dd_J\phi = 0$.

б. Пусть M компактно. Докажите, что $dd_J(C^\infty M) \cap dd_K(C^\infty M) = 0$.

в. Верно ли это на некомпактном многообразии?

г. [*] Пусть M компактно. Докажите, что для любой точной формы, удовлетворяющей $\eta \wedge \omega_I = 0$, выполнено $\eta \in dd_J(C^\infty M) + dd_K(C^\infty M)$.

Определение 4.2. Кватернионно-эрмитова структура на многообразии M есть действие алгебры кватернионов на TM плюс риманова метрика, инвариантная относительно I, J, K.

Задача 4.6. Пусть на 4-мерном многообразии M заданы 2-формы $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, причем для любой линейной комбинации вида $\eta = \sum \alpha_i \omega_i$, с $\alpha_i \in C^\infty$, форма объема $\eta \wedge \eta$ ненулевая во всех точках, где хотя бы один из $\alpha_i \neq 0$. Докажите, что на M существует кватернионно-эрмитова структура, такая, что соответствующие эрмитовы формы $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ выражаются как линейные комбинации ω_i. Докажите, что эта кватернионно-эрмитова структура единственна.