Комплексные поверхности 5: пространства Фреше

Задача 5.1. Пусть $f: U_1 \longrightarrow U_2$ – непрерывное отображение из подмножеств пространств Фреше, $U_1 \subset F_1, U_2 \subset F_2$. Предположим, что f дважды дифференцируемо. Докажите, что $f''(x, \lambda_1, \lambda_2) = f''(x, \lambda_2, \lambda_1)$ (вторая производная симметрична).

Задача 5.2. Пусть V – пространство последовательностей вещественных чисел с топологией почленной сходимости. Докажите, что V – пространство Фреше. Докажите, что V не допускает никакой нормы, совместимой с этой топологией (*полунормы* допускает, естественно).

Задача 5.3. Пусть M комплексное многообразие, а V – пространство голоморфных функций, с топологией равномерной сходимости на компактах. Докажите, что V – пространство Фреше.

Определение 5.1. Локально выпуклое топологическое векторное пространство - такое, в котором есть база топологии из выпуклых открытых множеств. **Трансляционно-инвариантная** значит "инвариантная относительно параллельных переносов".

Задача 5.4 (*). Пусть d – трансляционно-инвариантная метрика на топологическом векторном пространстве V. Предположим, что d задает на V локально выпуклую топологию. **Докажите, что в V шары любого радиуса выпуклы.**

Задача 5.5. Пусть $\phi: X \longrightarrow Y$ – морфизм многообразий Фреше, причем Y конечномерно, а дифференциал $d\phi$ сюрьективен в каждой точке X. Тогда $\phi^{-1}(y)$ – подмногообразие Фреше.

Задача 5.6. Пусть V – пространство гладких функций на окружности с топологией Фреше, а $\Psi_\lambda: V \longrightarrow V$ переводит f в $x \longrightarrow \int_0^\lambda f(x + \lambda t) dt$. Докажите, что Ψ_λ непрерывен, но не обратим для бесконечного числа $\lambda \in [0, \varepsilon]$.