

Комплексные поверхности 6: теорема Торелли для КЗ

Задача 5.1. Пусть Z – пространство всех невырожденных комплексных 2-форм на компактном 4-мерном многообразии, удовлетворяющих $\Omega^2 = 0$, с топологией, индуцированной с топологии Фреше на пространстве всех 2-форм. Докажите, что Z – многообразие Фреше.

Задача 5.2. В условиях предыдущей задачи, пусть $Z_0 \subset Z$ – пространство всех замкнутых форм в Z . Постройте ретракцию некоторой окрестности $Z_0 \subset Z$ на Z_0 .

Задача 5.3. Рассмотрим действие группы изотопий $\text{Diff}_0(M)$ компактного ориентированного многообразия на пространстве V_λ всех невырожденных форм объема η , удовлетворяющих $\int_M \eta = \lambda$. Докажите, что это действие транзитивно.

Задача 5.4. Пусть (M, I) – компактное, комплексное n -многообразие с тривиальным каноническим расслоением, а $\Omega_t \in \Lambda^{n,0}(M, I)$ – семейство форм объема, таких, что $[\Omega_t] = \text{const}$. Докажите, что существует семейство голоморфных диффеоморфизмов V_t таких, что $V_t^* \Omega_0 = \Omega_t$.

Задача 5.5. Пусть M есть КЗ-поверхность, снабженная гиперкэлеровой структурой (g, I, J, K) , а $h \in \text{End}(TM)$ – кватернионно-линейный эндоморфизм. Докажите, что в какой-то точке M , $h = 1$.

Задача 5.6. Докажите, что на КЗ нет метрики с сигнатурой $(-, +, +, +)$.

Задача 5.7. Рассмотрим разложение 2-форм на кэлеровой КЗ, $\Lambda^2(M) = \Lambda^-(M) \oplus \Lambda^+(M)$. Докажите, что любое сечение $\Lambda^-(M)$ где-нибудь зануляется.

Задача 5.8. Пусть η – 2-форма на кэлеровой КЗ, такая, что $\frac{\eta \wedge \eta}{\text{Vol } M} \leq 0$. Докажите, что $\eta \wedge \eta$ где-нибудь зануляется.