Тензорное произведение...

A1.1. Найдите тензорное произведение абелевых групп: **а)** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$; **б)** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

...и его применение в народном хозяйстве

Напомним, что классическая теорема Бойяи–Гервина утверждает, что любые два многоугольника равной площади равносоставлены. Выясним, верно ли аналогичное утверждение в трёхмерном пространстве.

Третья проблема Гильберта. Являются ли куб и правильный тетраэдр равного объема равносоставленными (т.е. можно ли куб разрезать на несколько многограников и сложить из них правильный тетраэдр того же объема)?

Инвариант Дена lite. Прежде чем приступать к третьей проблеме Гильберта, решим следующую задачу: можно ли разрезать прямоугольник 1×2 на конечное число прямоугольников *со сторонами, параллельными сторонам исходного* и сложить из них квадрат $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$, если прямоугольники запрещается поворачивать?

A1.2. Пусть прямоугольник P имеет стороны a и b. Обозначим через $D(P)$ элемент $a \otimes b$ в тензорном произведении $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Докажите следующие утверждения:

а) Если отрезок разбивает прямоугольник P на два, P_1 и P_2, то $D(P) = D(P_1) + D(P_2)$.

б) Инвариант D аддитивен: если прямоугольник P разбит на прямоугольники P_i, то $D(P) = \sum D(P_i)$.

в) Прямоугольник 1×2 нельзя разрезать на конечное число прямоугольников и сложить из них квадрат $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$. (В этой задаче стороны всех прямоугольников параллельны осям координат.)

Инвариант Дена. Пусть P — многогранник в $\mathbb{R}^3$ (например, выпуклый). Обозначим через ℓ_i длины его ребер, а через α_i величины соответствующих двугранных углов. *Инвариантом Дена* многогранника P называется элемент $\mathrm{Dehn}(P) := \sum \ell_i \otimes \frac{\alpha_i}{\pi}$ пространства $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathbb{R}/\mathbb{Q})$.

A1.3. а) Докажите, что если плоскость разбивает многогранник P на два многогранника, P_1 и P_2, то $\mathrm{Dehn}(P) = \mathrm{Dehn}(P_1) + \mathrm{Dehn}(P_2)$.

б) Инвариант Дена аддитивен: если многогранник P разбит на многогранники P_i, то $\mathrm{Dehn}(P) = \sum \mathrm{Dehn}(P_i)$ (отсюда следует, в частности, что инварианты Дена у двух равносоставленных многогранников совпадают).

A1.4. а) (Многочлены Чебышёва) Докажите, что $\cos n\varphi$ — многочлен от $\cos\varphi$. Чему равен коэффициент при его старшей степени?

б) Докажите, что угол $\arccos 1/3$ не является рациональным кратным π.

A1.5. Решите третью проблему Гильберта.

Историческая справка. Инвариант Дена придумал ученик Гильберта Макс Ден (Max Dehn) в конце XIX — начале XX века (по всей видимости, третья проблема Гильберта была решена еще до того, как Гильберт сформулировал свой список проблем). Через 60 с лишним лет после этого швейцарский математик Жан-Пьер Сидле (Jean-Pierre Sydler) доказал и обратное утверждение: если два многогранника имеют равные объемы и инварианты Дена, то они равносоставлены.