Билинейные формы

A2.1. а) Покажите, что выражение $(x+\lambda y,\ x+\lambda y)$ для фиксированных векторов x, y в евклидовом пространстве есть квадратичный многочлен от λ с неположительным дискриминантом.

б) Докажите *неравенство Коши-Буняковского-Шварца*:

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда x пропорционален y.

A2.2. а) Как меняется определитель матрицы Грама квадратичной формы при замене базиса с помощью матрицы C?

б) Укажите бесконечный набор попарно неэквивалентных квадратичных форм над $\mathbb{Q}$.

A2.3. а) Докажите, что $(P, Q) := \int\limits_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$ есть положительно определенная билинейная форма на пространстве многочленов одной переменной.

б) Найдите матрицу Грама этой формы в базисе из мономов.

в) Докажите, что *многочлены Лежандра* $P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n$ образуют ортогональный базис относительно этой формы.

г) Докажите, что $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$

A2.4. Оператор A на евклидовом пространстве называется *самосопряженным*, если $(Ax, y) = (x, Ay)$ для любой пары векторов x, y (т.е. $A^* = A$).

а) Докажите, что если W – инвариантное подпространство для оператора A, то его ортогональное дополнение $W^\perp$ тоже инвариантно.

б) Докажите, что оператор A диагонализуем в некотором ортогональном базисе.

Указание. У всякого вещественного оператора есть инвариантное подпространство размерности 2.

A2.5. а) Пусть $Q(\cdot, \cdot)$ – симметрическая билинейная форма на евклидовом пространстве. Докажите, что $Q(x, y) = (x, Ay)$ для некоторого самосопряженного оператора A.

б) **(Приведение формы к главным осям)** Докажите, что существует ортогональный базис, в котором матрица Грама формы Q диагональна.

A2.6. а) Оператор A на комплексном пространстве с эрмитовым скалярным произведением называется *эрмитовым*, если $(Ax, y) = (x, Ay)$ для любой пары векторов x, y. Докажите, что такой оператор диагонализуем в ортогональном базисе с вещественными собственными значениями.

б) Докажите, что всякая эрмитова форма $Q(\cdot, \cdot)$ на эрмитовом пространстве приводится к диагональному виду в ортогональном базисе.

в) Верно ли, что самосопряженный оператор на комплексном пространстве с невырожденной билинейной формой диагонализуем?

A2.7. а) Оператор A на комплексном пространстве с эрмитовым скалярным произведением называется *унитарным*, если $(Ax, Ay) = (x, y)$ для любой пары векторов x, y. Докажите, что такой оператор диагонализуем в ортогональном базисе с собственными значениями, по модулю равными единице.

б) К какому наиболее простому виду можно привести ортогональный оператор на вещественном евклидовом пространстве?

в) Верно ли, что ортогональный оператор на комплексном пространстве с невырожденной билинейной формой диагонализуем?