

## Действия групп

- A.3.1.** а) Укажите все точки плоскости  $\mathbb{R}^2$ , имеющие нетривиальный стабилизатор при действии группы симметрий правильного  $n$ -угольника, и найдите стабилизаторы этих точек. б) Найдите все орбиты этого действия. в) Те же вопросы для группы симметрий куба, действующей на пространстве  $\mathbb{R}^3$ .
- A.3.2.** Пусть  $G$  – конечная группа. Докажите, что а) всякая подгруппа  $H \subset G$  индекса 2 нормальна; б) всякая подгруппа  $H \subset G$  индекса  $p$ , где  $p$  – наименьший простой делитель порядка группы  $G$ , нормальна. УКАЗАНИЕ. Рассмотрите гомоморфизм  $G \rightarrow S_p$  заданный левым действием группы  $G$  на множестве  $G/H$ .
- A.3.3.** а) Найдите все классы сопряженности в группе  $A_5$  четных перестановок 5-элементного множества. б) Докажите, что группа  $A_5$  проста, т.е. не содержит собственных нормальных подгрупп.
- A.3.4.** а) Сколькими способами можно составить ожерелье из  $k$  бусин  $n$  разных цветов? б) Сколькими способами можно раскрасить грани правильного тетраэдра в  $n$  цветов (каждую грань целиком в один цвет)? Тетраэдры считаются одинаково раскрашенными, если их можно перепутать, повернув в руках. в) Тот же вопрос для куба.
- A.3.5.** а) Покажите, что центр масс конечной системы точек аффинного пространства сохраняется всяким аффинным преобразованием, сохраняющим это множество точек. б) Докажите, что всякая конечная группа аффинных преобразований аффинного пространства имеет неподвижную точку. в) Приведите пример конечной группы проективных преобразований плоскости, не имеющей неподвижных точек.
- A.3.6.** а) Докажите, что линейная комбинация положительно определенных квадратичных форм с положительными коэффициентами есть положительно определенная квадратичная форма. б) Докажите, что для всякой конечной группы аффинных преобразований вещественного аффинного пространства найдется инвариантная квадратичная функция на этом пространстве.