

Автоморфизмы групп перестановок

Напомним, что через \mathfrak{S}_n обозначается группа перестановок множества из n элементов, а через \mathfrak{A}_n — подгруппа в \mathfrak{S}_n , состоящая из чётных перестановок.

A4.1. а) Опишите классы сопряжённости в группе \mathfrak{A}_n .

б) Докажите, что при $n \geq 5$ группа \mathfrak{A}_n проста, т.е. не имеет собственных нормальных подгрупп.

Изоморфизм $\varphi: G \rightarrow G$ называется *автоморфизмом*. Каждому элементу $g \in G$ соответствует автоморфизм $\varphi_g: h \mapsto ghg^{-1}$. Автоморфизмы такого вида называются *внутренними*.

A4.2. а) Проверьте, что всякий автоморфизм группы переводит классы сопряжённости в классы сопряжённости.

б) Покажите, что если автоморфизм группы \mathfrak{S}_n переводит транспозиции в транспозиции, то он является внутренним.

в) Покажите, что если $n \neq 6$, то всякий автоморфизм группы \mathfrak{S}_n является внутренним.

A4.3. Пусть H — подгруппа индекса 6 в \mathfrak{S}_6 . Тогда действие \mathfrak{S}_6 на \mathfrak{S}_6/H задает гомоморфизм $\mathfrak{S}_6 \rightarrow \mathfrak{S}_6$.

а) Покажите, что это автоморфизм.

б) Докажите, что любая подгруппа индекса 6 в \mathfrak{S}_6 изоморфна \mathfrak{S}_5 .

A4.4. Докажите следующие утверждения про группу $\mathrm{PGL}_2(K) = \mathrm{GL}_2(K)/Z(\mathrm{GL}_2(K))$:

а) Действие группы $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ на $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ задает вложение $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ в \mathfrak{S}_6 .

б) $\mathrm{PGL}_2(K)$ действует на $\mathbb{P}^1(K)$ транзитивно.

в) Вложение из пункта а) не совпадает ни с одним из 6 «стандартных» вложений \mathfrak{S}_5 из \mathfrak{S}_6 , а соответствующий автоморфизм из предыдущей задачи не является внутренним.

г) Куда этот автоморфизм переводит транспозицию?

A4.5. а) Докажите, что группа *внешних автоморфизмов* $\mathrm{Out} \mathfrak{S}_6 = \mathrm{Aut} \mathfrak{S}_6 / \mathrm{Inn} \mathfrak{S}_6$ изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (то есть построенный в предыдущей задаче автоморфизм \mathfrak{S}_6 единственен с точностью до внутреннего автоморфизма).

б) Верно ли, что $\mathrm{Aut} \mathfrak{S}_6 = \mathrm{Inn} \mathfrak{S}_6 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

A4.6. Докажите, что всякая простая группа порядка 60 изоморфна \mathfrak{A}_5 .