Представления абелевых групп

A5.1. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — семейство (возможно, бесконечное) коммутирующих линейных операторов на конечномерном комплексном векторном пространстве V.

а) Покажите, что у всех операторов A_i есть общий собственный вектор в V.

б) Покажите, что в некотором базисе пространства V все операторы A_i записываются при помощи верхнетреугольных матриц.

в) Не используя лемму Шура, докажите, что все неприводимые представления конечной абелевой группы над $\mathbb{C}$ одномерны.

Представления группы $\mathfrak{S}_3$

A5.2. Пусть $\sigma = (12), \tau = (123) \in \mathfrak{S}_3$, W — некоторое представление группы $\mathfrak{S}_3$.

а) Докажите, что если $v \in W$ — собственный вектор для τ, отвечающий собственному значению ω, то вектор $\sigma(v)$ также является собственным вектором для τ с собственным значением ω^2. Какие значения может принимать ω?

б) Докажите, что в условиях предыдущего пункта подпространство $\langle v, \sigma(v)\rangle$ является подпредставлением группы S_3 (таким образом, размерность всякого неприводимого представления $\mathfrak{S}_3$ не превышает двух).

в) Опишите все неприводимые представления группы $\mathfrak{S}_3$ с точностью до изоморфизма.

A5.3. а) Разложите на неприводимые регулярное представление R группы $\mathfrak{S}_3$.

б) Пусть V — двумерное представление группы $\mathfrak{S}_3$. Покажите, что $\mathrm{Sym}^{k+6}V \cong \mathrm{Sym}^k V \oplus R$.

в) Разложите на неприводимые $\mathrm{Sym}^k V$ для всех k.

A5.4. Приведите пример представления конечной группы над полем конечной характеристики, не являющегося вполне приводимым.

A5.5*. Пусть V — неприводимое представление конечной группы G. Покажите, что G-инвариантное эрмитово скалярное произведение на V единственно с точностью до пропорциональности.